مبادئ حساب التفاضل

إعـــداد

دكـــتور

عبد الموجود عفيفي أحمد

كلية التربية - جامعة الإسكندرية



الباب الأول

الدوال والنهايات والاتصال

دوال المتغير الواحد Functions of one variable:

إذا ارتبط متغيران x , y بعلاقة معينة بحيث تتحدد قيمة y إذا علمت قيمة x قيل أن المتغير y دالة في المتغير x.

يسمى x بالمتغير المستقل Independent Variable ويسمى y بالمتغير التابع Dependent Variable. ويمكن استخدام الرموز الآتية للتعبير عن دوال في x:

$$f(x) \quad , \quad \varphi(x) \quad , \quad \psi(x)$$

قيم x تسمى بمجال الدالة أما قيم y فتسمى بالمجال المقابل.

الدالة الصريحة والدالة الضمنية:

يقال للمتغير y أنه دالة صريحة في x إذا أمكن كتابته على الصورة:

$$y = f(x)$$

وإذا لم نتمكن من كتابة الدالة y على الصرة السابقة فإن الدالة في هذه الحالة تسمى دالة ضمنية.

مثال:

$y = x^2 + 3x$ دالة صريحة

$y = x + \cos(x + y)$ دالة ضمنية

دالة القوى: هي دالة على الصورة:

$$f(x) = x^n$$

حيث n عدد صحيح موجب وهذه الدالة معرفة لجميع قيم x الحقيقية.

إذا كانت n = 1 فإن الدالة تمثل خطًا مستقيمًا.

وإذا كانت n = 2 فإن الدالة تمثل قطعًا مكافئًا.

والصورة العامة لكثيرات الحدود هي:

$$f(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_n$$

والمعاملات $a_0 , a_1 , \ldots , a_n$ جميعها كميات ثابتة.

ملاحظــة: الصورة العامة السابقة تسمى كثيرة حدود من الدرجــة n بشــرط أن $a_o \neq 0$.

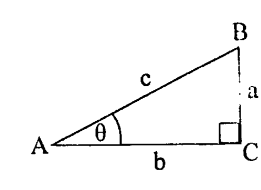
الدالة الكسرية Rational Function:

وتعطى فيها y على صورة كسر بسطه كثيرة حدود من الدرجة n ومقامه كثيرة حدود من الدرجة m وتكتب على الصورة:

$$y = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_m x^m}$$

وهذه الدالة معرفة لجميع الأعداد الحقيقية ما عدا قيم x التي تجعل كثيرة الحدود التي في المقام = صفر (لأن القسمة على الصفر غير معرفة).

الدوال المثلثية:



إذا كان ABC مثلث قائم الزاوية في C كما بالشكل فإن:

$$\sin\theta = \frac{a}{c}$$ جا θ = المقابل / الوتر

$$\cos\theta = \frac{b}{c}$$ جتا θ = المجاور / الوتر

$$\tan\theta = \frac{a}{b}$$ ظا θ = المقابل / المجاور

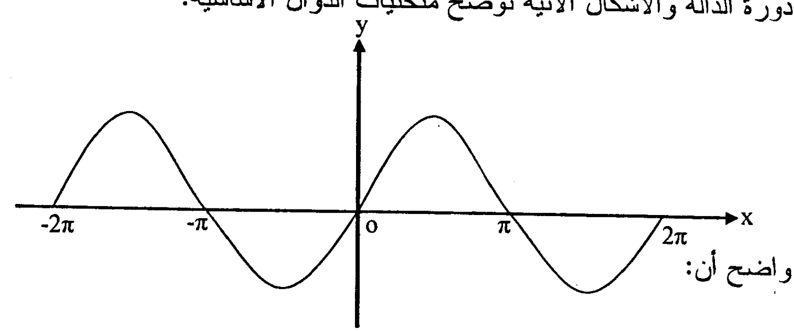
أما مقلوب النسب السابقة فيعطى ثلاث دوال مثلثية أخرى تعرف كالآتي:

$$\frac{1}{\sin\theta} = \text{casec}\,\theta$$ قتا θ =

$$\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$$ قاθ =

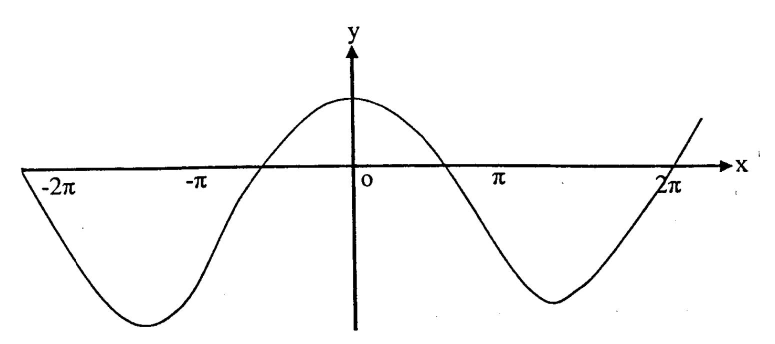
$$\frac{1}{\tan\theta} = \cot\text{an}\,\theta$$ ظتاθ =

والدوال المثلثية دوال دورية أي أن قيم هذه الدوال تتكرر كل فترة معينة تسـمى دورة الدالة والأشكال الآتية توضح منحنيات الدوال الأساسية.



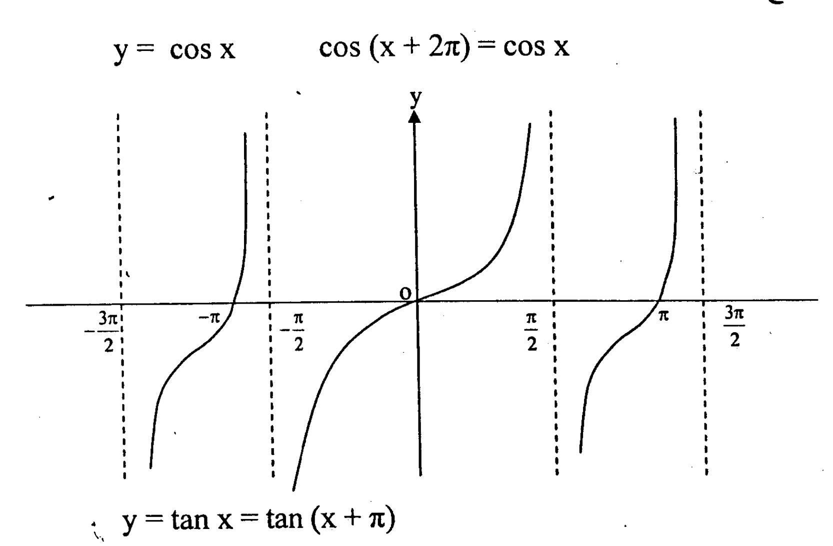
واضح أن:

$y = \sin x \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin x$



واضح أن:

$y = \cos x \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x$



$y = \tan x = \tan(x + \pi)$

الدالة الزوجية والدالة الفردية Even and odd function:

يقال للدالة f (x) لأنها دالة زوجية في المتغير x إذا كانت هذه الدالة لا تتغيــر إذا وضعنا x− بدلاً من x أي أن:

$f(-x) = f(x)$

مثال ذلك:

x^2, x^4, cos x , sec x

ومنحنيات هذه الدوال تكون متماثلة بالنسبة لمحور y حيث أن كل نقطة على المنحنى (x , y) يناظرها نقطة أخرى (– x , y) واقعة على نفس المنحنى.

أما إذا حققت الدالة g (x) العلاقة:

$$g(-x) = -g(x)$$

وذلك لجميع قيم x فإن الدالة g (x) تسمى دالة فردية ومن أمثلتها الدوال:

x^3, tan x, sin x , $x^2 \sin x$

ويكون منحنى الدالة الفردية متماثلاً بالنسبة إلى نقطة الأصل.

الدوال وحيدة القيمة Single- valued function:

إذا كانت y = f (x) وكانت كل قيمة للمتغير x تناظرها قيمة واحدة للمتغير y فإن الدالة y تسمى دالة وحيدة القيمة أما إذا كانت بعض قيم x تناظرها أكثر من قيمة للمتغير y فإن y في هذه الحالة تسمى دالة متعددة القيم many-valued function.

ومثال ذلك الدوال:

$$y^2 = x \quad , \quad y = \sin^{-1} x$$

ومن الجدير بالذكر أن تعريف الدالة يقتصر أحياناً على الدوال وحيدة القيمة فقط بمعنى أنه لكي تكون أي علاقة دالة يجب أن يكون لكل قيمة لـ x قيمة واحدة لـ y.

الدوال العكسية Inverse functions:

نفرض أن:

$$y = f(x)$$

وإذا أمكن الحصول على x كدالة في y وذلك من المعادلة المعطاة.

$$x = \phi(y)$$

فإنه يقال في هذه الحالة أن الدالتين $f(x)$ ، $\phi(y)$ دالتان عكسيتان.

مثال ذلك:

$$y = \sin x \qquad \therefore x = \sin^{-1} y$$

أي أن $\sin x$ ، $\sin^{-1} y$ دالتان عكسيتان.

الكميات الغير معينة:

نلاحظ أن قيمة الدالة $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ عندما $x = 1$ غير معرفة لأن التعويض المباشر عن قيمة x يعطى $\dfrac{0}{0}$ وهي كمية غير معينة ومن أمثلة الكميات الغير معينة.

$$\frac{0}{0} \quad , \quad \frac{\infty}{\infty} \quad , \quad \infty - \infty \quad , \quad 0 \times \infty \quad , \quad 0^0 \quad , \quad \infty^0$$

الدالة الأسية:

الدالة التي على الصورة $y = a^x$ حيث a كمية موجبة تسمى دالة أسية وهي دالـــة وحيدة القيمة ومتصلة لجميع قيم المتغير x الحقيقية والدوال الأسية لها الخواص الآتية:

(i) $a^n a^m = a^{n+m}$

(ii) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

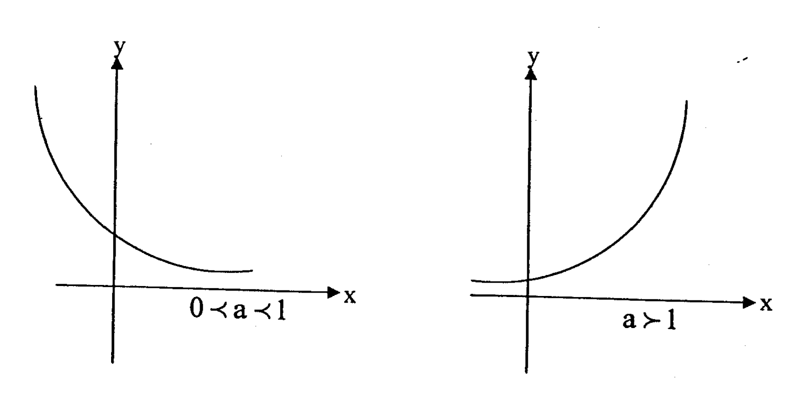
(iii) $a^0 = 1$

(iv) $\left(a^n\right)^m = a^{nm}$

(v) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

(vi) $a^x \succ 0$

إذا كانت $0 \prec a \prec 1$ فإن منحنى الدالة الأسية يكون كما في شكل (أ) أمـــا إذا كانــت $a \succ 1$ فإن منحنى الدالة الأسية يكون كما في شكل (ب).



الدالة اللوغاريتمية:

إذا كانت:

$$x = a^y$$

فإن الدالة اللوغاريتمية y تعرف على أنها الدالة العكسية للدالة الأسية السابقة وتكتــب على الصورة:

$$y = \log_a x$$

وتقرأ هكذا: y تساوي لوغاريتم x للأســاس a وتســمى y فـــي هــذه الحالــة دالــة لوغاريتمية، والدالة اللوغاريتمية دالة وحيدة القيمة ومتصلة لجميــع قــيم x الموجبــة والدالة اللوغاريتمية تحقق الخواص الآتية:

(i) $\log_a y_1 y_2 = \log_a y_1 + \log_a y_2$

(ii) $\log_a \frac{y_2}{y_1} = \log_a y_2 - \log_a y_1$

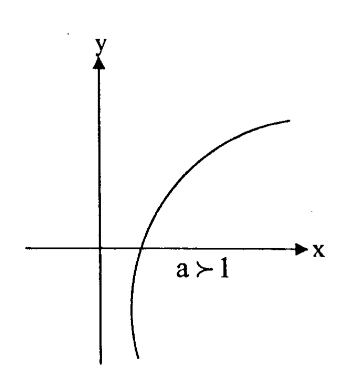
(iii) $\log x^n = n \log x$

(iv) $\log_a a = 1$

(v) $\log_a 1 = 0 \quad , \quad \log_a 0 = -\infty$

(vi) $\log_a x = \log_b x \quad \log_a b$

والسحن يبين منحنى الدالة اللوغاريتمية $y = \log_a x$ عندما تكون $a \succ 1$.



اللوغاريتم الطبيعي:

يسمى اللوغاريتم لوغاريتمًا طبيعيًا إذا كان أساس اللوغاريتم هو العدد e وفي هــذه الحالة نكتب:

$$y = \log x$$

دون كتابة أساس اللوغاريتم ويمكن كتابته $y = \ln x$ ولإيجاد العلاقــة بــين $\log x$ ، $\log_a x$ نفرض أن:

$$y = \log_a x$$

$$\therefore x = a^y$$

وهي الدالة الأسية (الدالة العكسية للدالة y) وذلك من تعريف الدالة اللوغاريتمية.

$$\therefore \log x = y \log a$$

i.e. $$\log x = \log_a x \quad \log a$$

وبالمثل يمكن إثبات أن:

$$\log_a x = \log x \quad \log_a e$$

ومنها:

$$\log_a e \quad \log a = 1$$

وذلك بوضع $x = a$.

ومن العلاقات السابقة إذا كان أساس اللوغاريتم يساوي 10 $(a = 10)$ فإن:

$$\log x = \log_{10} x \quad \log 10$$
$$= 2.303 \quad \log_{10} x$$
$$\log_{10} x = \log x \quad \log_{10} e$$
$$= 0.434 \quad \log x$$

حيث:

$$\log_{10} = 2.303$$
$$\log_{10} e = 0.434$$

وذلك باستخدام جداول اللوغاريتمات وهذه النتائج تقريبية.

تعريف النهايات:

إذا كانت قيمة الـــدالة f (x) تقرب مـــن القيمة c كلما اقتربت x من القيمة a بحيـ
يمكن جعل الفرق بين f (x) , c صغيرًا كيفما نشاء وذلك باختيار x قريبة قربًا كافيًـــ
من a فإنه يقال أن:

نهاية الدالة f (x) تساوي c عندما تؤول x إلى a.

ويعبر عن ذلك هكذا:

$$\lim_{x\to a} f(x) = c$$

بعض النظريات الأساسية:

1- $$\lim_{x\to a} (u_1 \pm u_2) = \lim_{x\to a} u_1 \pm \lim_{x\to a} u_2$$

2- $$\lim_{x\to a} u_1 u_2 = \lim_{x\to a} u_1 \cdot \lim_{x\to a} u_2$$

3- $$\lim_{x\to a} \frac{u_1}{u_2} = \frac{\lim_{x\to a} u_1}{\lim_{x\to a} u_2}$$

مثال (١): أوجد قيمة:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2}$$

التعويض المباشر عن $x = 2$ يعطى $\frac{0}{0}$ كمية غير معينة وبتحليـــل البســـط والمقـــام
والاختصار ثم التعويض نحصل على:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x+1)(x-2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x+3}{x+1} = \frac{5}{3}$$

مثال (٢): أوجد قيمة:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{1+x}}{x}$$

التعويض المباشر يعطى كمية غير معينة. بضرب البسط والمقام في مرافق البسط أي في الكمية $1+\sqrt{1+x}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{1+x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+\sqrt{1+x}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

وإذا كانَ لدينا دالة كسرية والمطلوب إيجاد قيمة الدالة عندما $x \to \infty$ فإننا نقسم كل من البسط والمقام على x مرفوعة لأكبر أس سواء في البسط أو المقام وتكون النتائج كما يلي:

١- إذا كانت درجة البسط = درجة المقام فإن النهاية تساوي معامل أكبر أس في البسط مقسومًا على معامل أكبر أس في المقام.

٢- إذا كانت درجة البسط أصغر من درجة المقام فإن النهاية تساوي صفر.

٣- إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام فإن النهاية تكون غير محدودة.

تدريب:-

$$1\text{-} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{4x^3+x}{5x^3-6} = \frac{4}{5}$$

2- $\lim_{x\to\infty} \frac{x+3}{x^2-5}=0$

3- $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+2x^2-x}{x^2+x+7}=\infty$

بعض النهايات الهامة:

1- $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta}=1$

ومنها:

2- $\lim_{\theta\to 0} \frac{\tan\theta}{\theta}=1$

3- $\lim_{x\to 0} \frac{x^n-a^n}{x-a}=n\,a^{n-1}$

ومنها:

4- $\lim_{x\to 0} \frac{x^n-a^n}{x^m-a^m}=\frac{n}{m}a^{n-m}$

وسوف نكتفي هنا بمعرفة هذه النهايات بدون برهان. ومن الجدير بالذكر هنا أن النهايتين الثالثة والرابعة صحيحتين لجميع قيم m , n الصحيحة أو الكسرية الموجبة أو السالبة.

ومن النهايات الهامة النهاية الآتية:

5- $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+....+$

وهذه النهاية يرمز لها عادة بالرمز e وسنفترض وجود هذه النهاية ويمكن أن نجـد أن قيمة الدالة $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ تقترب من القيمة 2.718 عندما تقترب x من الصفر.

$$\text{i.e.}\quad \lim_{x\to 0}\ (1+x)^{\frac{1}{x}}=2.718=e$$

ملاحظة: يمكن أن يعرف العدد e أيضًا هكذا:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

وسوف نكتفي هنا بالتعريف السابق فقط للعدد e والعدد e والعدد e له أهميـة خاصـة ونعتبره الأساس الطبيعي للدالة اللوغاريتمية.

تمـــاريـــن

١- إذا كان $f(x)=x^2$ أوجد قيمة:

$$f(2)\qquad,\qquad f(2+k)\qquad,\qquad \frac{f(2+k)-f(2)}{k}$$

٢- إذا كان $f(x)=\sin^2 x\cos x$ أوجد قيمة $[f(x)]^2+3f(x)-4$ وذلك عنـدما $x=\frac{\pi}{3}$.

٣- إذا كان $f(x)=x^2+4x+2$ فأثبت أن $f(2)=7f(0)$.

٤- إذا كان $f(x)=\frac{4\sec x}{2+x^2}$ فأثبت أن $f(x)$ دالة زوجية.

٥- إذا كان $f(x)=\frac{1}{x^2}$ فأثبت أن $f(y)\,f(z)=f(yz)$.

٦- إذا كان $f(x, y) = x\, y$ فأثبت أن $f\left(x, \frac{1}{x}\right) = 1$.

٧- عبر عن y صراحة بدلالة x من العلاقات الآتية:

(i) $2xy + 3x + 2y + 6 = 0$

(ii) $3 \sin y + 5 = 4x$

(iii) $y^2 - 4y = x^2$

٨- أحسب النهايات الآتية:

1- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^9 - a^9}{x^5 - a^5}$

2- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-1)^{\frac{3}{4}} - 1}{(x-1)^{\frac{1}{2}} - 1}$

3- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^5 - 1}{\sqrt{x} - 1}$

4- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x + 1}{x^2 - 3}$

5- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 3x + 1}{5x^2 + 1}$

٩- حقق النهايات الآتية:

- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 4x + 7}{x^3 + 8x + 5} = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\tan 5x} = \dfrac{3}{5}$

- $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\sin 2\theta \sin \theta}{\theta \sin 6\theta} = \dfrac{1}{3}$, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1} = \dfrac{1}{4}$

- $\lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta\sin\theta} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1-\cos x} = 2$

بعض قوانين حساب المثلثات:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$= 2\cos^2\theta - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2\theta$$

الدوال المتصلة:

تسمى الدالة $f(x)$ دالة متصلة (أو مستمرة) عند نقطة معينة $x = a$ إذا تحققت الشروط الآتية:

١- $f(a)$ موجودة (أي أن الدالة $f(x)$ معرفة عند النقطة a).

٢- $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة.

٣- $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

وإذا كانت الدالة متصلة عند كل نقطة في فترة معينة فإنها تسمى متصلة في هذه الفترة.

وإذا لم يتحقق واحد أو أكثر من الشروط السابقة سميت الدالة غير متصلة عند النقطة a أي منفصلة.

ومن أمثلة الدوال المتصلة الدوال الآتية:

$y = \sin x$, $y = \cos x$

$y = a^x$, $y = \log_a x$

وكلها دوال متصلة لجميع قيم x الحقيقية.

تعريف آخر للاتصال:

الدالة $f(x)$ متصلة عند النقطة $x = a$ إذا كان لأي عدد صغير موجب يمكن إيجاد عدد صغير آخر $\delta > 0$ بحيث يكون:

$$|f(x) - f(a)| < \delta \qquad , \qquad |x - a| < \delta$$

مثال (١): إذا كانت $f(x) = x + 2$ فمن الملاحظ أن:

$$f(2) = 4 \qquad , \qquad \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$$

ومن ثم نرى أن الدالة المعطاة متصلة عند $x = 2$ لأن $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

مثال (٢): الدالة $f(x) = x^2$ هي دالة متصلة عند النقطة $x = 3$ لأن:

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 9 = f(3)$$

مثال (٣): أدرس اتصال الدالة:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$$

من تعريف الدالة نجد أن $f(2) = 0$ بينما نجد أن:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

ومن ثم نرى أن:

$$\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$$

وعلى ذلك فإن الدالة المعطاة ليست متصلة عند النقطة $x = 2$.

مثال (٤): الدالة $f(x) = \frac{1}{x-1}$ دالة متصلة لجميع قيم x الحقيقية ما عدا $x = 1$ فهي غير متصلة عندها لأن $f(1)$ غير موجودة (الدالة غير معرفة عند $x = 1$).

خواص الدوال المتصلة:

من النظريات التي أوردناها سابقًا دالتي تتعلق بالنهايات ومن تعريف الاتصال يمكننا أن نستنتج النظريات التالية والتي تتعلق بالدوال المتصلة:

١- إذا كانت الدالتان f, g متصلتان عند $x = x_0$ فإن كلا من الدوال:

$$f + g \quad , \quad f - g \quad , \quad f . g$$

دوال متصلة عـــند النقطة $x = x_0$، وإذا كانت الدالتان f, g متصلتان على الفـــترة (a, b) الواقعة في مجال تعريفهما فإن الدوال المعطاة متصلة أيضًا على نفس الفترة.

٢- الدالة $\frac{f(x)}{g(x)}$ (حيث $g(x) \neq 0$) متصلة عند النقطة $x = a$ إذا كانت كل من f, g متصلة عند النقطة $x = a$.

مثال (٥): الدالة $x \neq 0$ $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ دالة غير معرفة عند $x = 0$ لذا فهي غير متصلة عند هذه النقطة.

مثال (٦) الدالة $f(x) = \frac{(x-1)(x-5)}{x(x-1)(x-5)}$ دالة غير معرفة عند القيم $x = 0 , 1 , 5$ لذأ فإنها دالة غير متصلة عند هذه القيم.

الاتصال عن اليمين والاتصال عن اليسار:

نقول عن الدالة f المعرفة عن يسار x_0 أنها كمتصلة عن يسار $x = x_0$ إذا تحقق الشرط:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

وبالمثل نقول أن الدالة f المعرفة عن يمين x_0 أنها متصلة عن يمـــين $x = x_0$ إذا تحقق الشرط:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

مثال:

- الدالة $f = \sqrt{x-1}$ دالة متصلة عن يمين $x = 1$.
- الدالة $f = \sqrt{x-1}$ دالة متصلة عن يسار $x = 2$.

الباب الثاني

مبادئ التفاضل

إذا كانت $f(x)$ دالة معرفة في الفترة $[a\ ,\ b]$ وكانت x_o نقطة واقعة في الفترة المفتوحة $]a\ ,\ b[$ فإذا وجدت النهاية $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ وكانت:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$$

حيث x_o نقطة دالة الفترة المعطاة، فإنه يقال أن الدالة $f\ (x)$ دالة متصلة عند النقطة $x = x_o$. وإذا كانت الدالة متصلة عند جميع نقط الفترة فإننا نقول أن الدالة متصلة في الفترة $[a\ ,\ b]$.

تعريف:

يقال أن الدالة $y = f\ (x)$ دالة قابلة للفاضل عند x_o إذا وجدت النهاية:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$$

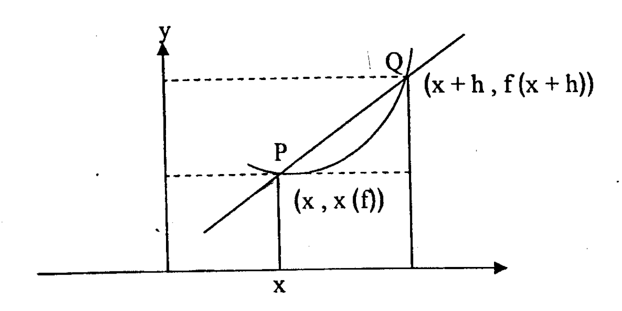
ويرمز لهذه النهاية بالرمز $f'(x_o)$ أو $\left.\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}\right|_{x_o}$ أو $y'(x_o)$ وتسمى مشتقة الدالة عند النقطة x_o.

المعنى الهندسي للمشتقة:

إذا رسمنا منحنى الدالة $y = f\ (x)$ وحددنا عليه النقطة $(x\ ,\ y\ (x))$ ثم أخذنا النقطة المجاورة لها على المنحنى $(x + h\ ,\ y\ (x + h))$ فإن التعبير:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

يمثل ميل المستقيم الواصل بين هاتين النقطتين أي ظل الزاوية التـــي يصـــنعها هــذا المستقيم مع محور السينات.



ويرمز أحياناً للكمية h بالرمز Δx وتسمى التغير في x ويرمز للكمية $f(x+h)-f(x)$ بالرمز Δf أو Δy وتسمى التغير في y وعندئذ فإن:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

وعندما تقترب h من الصفر أي عندما تقترب النقطة Q من النقطة P فإن المستقيم PQ يقترب من وضع التماس للمنحنى عند النقطة P وفي النهاية فإن ميــل المســتقيم PQ يؤول إلى ميل المماس للمنحنى عند النقطة P.

نظرية: إذا كانت $f(x)$ قابلة للتفاضل عند $x = a$ فإنها ستكون متصلة عند $x = a$.

مما سبق نستطيع كتابة ما يلي:

$$y = f(x)$$
$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

وهذه النهاية تعطى قيمة المشتقة الأولى $\frac{dy}{dx}$ للدالة y من المبـــادئ الأوليـــة لتعريـــف المشتقة الأولى.

بعض قوانين التفاضل:

١- مشتقة الثابت = صفر

٢- مشتقة متغير بالنسبة إلى نفسه تساوي الواحد الصحيح:

i.e. $\frac{dx}{dx} = 1$

or $y = x$ $\therefore \frac{dy}{dx} = 1$

٣- إذا كانت:

$$y = f(z)$$

$$z = g(x)$$

فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$.

٤- مشتقة حاصل ضرب ثابت في دالة يساوي تفاضل الدالة مضروبًا في الثابت.

$$y' \quad y = c \quad f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = c\frac{df(x)}{dx}$$

وعلى ذلك فإن مشتقة كثيرة الحدود:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

$$\frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2x + ... + na_nx^{n-1}$$

٥- إذا كانت $y = f(x) \pm g(x)$ فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \pm \frac{dg(x)}{dx}$.

٦- إذا كانت $y = f(x)g(x)$ فإن $\frac{dy}{dx} = f(x)\frac{dg(x)}{dx} + g(x)\frac{df(x)}{dx}$.

٧- إذا كانت $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)\frac{df(x)}{dx} - f(x)\frac{dg(x)}{dx}}{[g(x)]^2}$.

٨- المشتقة الأولى للدالة $y = x^n$ ، n عدد صحيح أو كسر:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{(x+\Delta x) - x} = n\,x^{n-1}$$

في القانون السابق: إذا كانت $n = \frac{1}{2}$ فإن:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

أي أن المشتقة الدالة الأولى للجذر التربيعي لدالة ما تساوي كسر بسطه الواحد الصحيح، ومقامه ضعف الجذر.

أما إذا كانت:

$$y = u^n \quad , \quad u = u(x)$$

والمطلوب إيجاد $\frac{dy}{dx}$ فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = n\, u^{n-1} \frac{du}{dx}$$

$$n = \frac{1}{2} \qquad y = u^{\frac{1}{2}} \quad , \quad u = u(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{dx}$$

المشتقات المتتالية:

إذا كانت $y = f(x)$ فإن المشتقة الأولى لهذه الدالة $y'(x)$ هي أيضاً دالة في المتغير x. وبالتالي يمكن تفاضلها للحصول على المشتقة الثانية للدالة $f(x)$ ويرمز لها بالرمز $\frac{d^2y}{dx^2}$ وبالمثل يمكن إيجاد المشتقات الأعلى من ذلك ويرمز للمشتقات المختلفة بالرموز:

$$y' \quad , \quad y'' \quad , \quad y''' \quad , \; \ldots \; , \quad y^n$$

أو

$$\frac{dy}{dx} \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} \quad , \quad \frac{d^3y}{dx^3} \quad , \quad \ldots \quad , \quad \frac{d^ny}{dx^n}$$

مشتقة الدالة الضمنية:

إذا كانت y دالة ضمنية للمتغير x أي إذا لم نستطيع كتابة y على الصورة $y = f(x)$، فإنه لإيجاد المشتقة الأولى في هذه الحالة فإننا نتبع الخطوات الآتية:

١- نوجد المشتقة الأولى لكل حد من حدود المعادلة باعتبار أن y نفسها دالة في x.

٢- نضع الحدود التي تحتوي على $\frac{dy}{dx}$ في طرف.

٣- نقسم طرفي المعادلة على معامل $\frac{dy}{dx}$ وذلك للحصول على المشتقة الأولى.

أمثلة:

مثال (١): أوجد ميل المماس للمنحنى $y = x^3 - 12x$ عند أي نقطة $(x \ , \ y)$ عليه ثم أوجد نقط المنحنى التي يكون عندها المماس موازيًا لمحور x.

الحــل: نفرض أن ميل المماس للمنحنى هو m وعلى ذلك فإن:

$$m = \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12$$

وإذا كان المماس موازيًا لمحور x فإن $m = 0$:

$$3x^2 - 12 = 0 \qquad\qquad x = \pm 2$$

وعلى ذلك فإن النقط المطلوبة هي:

$$(2 \, , 16) \qquad , \qquad (-2 \, , 16)$$

مثال (٢): إذا كانت:

$$x = \sqrt{t+2} \qquad , \qquad y = t^2 - 3$$

أوجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ ، $\frac{dy}{dx}$.

الحـــل: لإيجاد المشتقة الأولى فإننا نستخدم قانون دالة الدالة:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}$$

$$x=\sqrt{t+2} \qquad \therefore \frac{dx}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{t+2}}$$

$$y=t^2-3 \qquad \therefore \frac{dy}{dt}=2t$$

وعلى ذلك فإن:

$$\frac{dy}{dx}=2t.2\sqrt{t+2}=4t\sqrt{t+2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}=\left(4t\sqrt{t+2}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$=4\left(\frac{t}{2\sqrt{t+2}}+\sqrt{t+2}\right).2\sqrt{t+2}$$

$$=4\left(3t+4\right)$$

مثال (٣): أوجد المشتقة الأولى للدالة:

$$y=\frac{x^3-3}{x^2+1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x^2+1)(3x^2)-(x^3-3)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{3x^4+3x^2-2x^4+6x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x^4 + 3x^2 + 6x}{(x^2 + 1)^2}$$

): أوجد المشتقة الأولى $y' = \frac{dy}{dx}$ من المعادلة:

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

طرفي المعادلة بالنسبة إلى x نحصل على:

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} + 2g + 2f\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(2y + 2f) = -2(x + g)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{(x + g)}{(y + f)}$$

المشتقة الأولى للدوال الآتية:

- $y = x^4$, $y = \frac{1}{2}(x^4 - x)$
- $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x - 2}$
- $y = x^3 - 4x^2 + 7x + 6$
- $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 1}$, $y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$
- $y = (1 - 3x^2)^5$
- $y = \sqrt{1 + x^2}$ $y = (x + 1)^2(x^2 + 1)$

٢- أوجد ميل المماس للمنحنيات:

$$y = \frac{x}{1-x} \quad , \quad y = \frac{3x}{x+1}$$

عند النقطة $x = 4$.

٣- أوجد النقط الواقعة على المنحنى $y = x^2 - 2x + 4$ والتي يكون المماس عنـــدها موازيًا لمحور x.

٤- أوجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ ، $\frac{dy}{dx}$ للدالة الضمنية المعطاة بالمعادلة $(x-y)^2 = x$.

٥- أوجد المشتقة الأولى والثانية $\frac{d^2y}{dx^2}$ ، $\frac{dy}{dx}$ في كل من الحالات الآتية:

(i) $x = t^3 - 1 \quad , \quad y = t^2 + 1$

(ii) $x = \sqrt{1-u} \quad , \quad y = u^3 - 3u$

٦- إذا كانت $y = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^n$ اثبت أن:

$$(1+x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = n^2y^2$$

$$(1+x^2)y'' + xy' - n^2y = 0$$

مشتقة الدوال المثلثية:

نفرض أن:

$$y = \sin x$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

وعندما تؤول Δx إلى الصفر فإننا نحصل على:

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad (1)$$

وإذا كانت $y = \cos x$ فإن:

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$$

i.e. $$\frac{d}{dx} = (\cos x) = -\sin x \qquad (2)$$

وإذا كانت $y = \tan x$ فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$\therefore \frac{d}{dx} = (\tan x) = \sec^2 x \qquad (3)$$

وبالمثل يمكن الحصول على:

$$\frac{d}{dx} = (\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x \qquad (4)$$

$$\frac{d}{dx} = (\sec x) = \sec x \tan x \qquad (5)$$

$$\frac{d}{dx} = (\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec}\ x \cot x \qquad (6)$$

مثال (أ): أوجد المشتقة الأولى للدالة:

$$y = x^3 \sin x$$

الحـــل:

$$\frac{dy}{dx} = x^3 \cos x + (\sin x)(3x^2)$$

$$= x^3 \cos x + 3x^2 \sin x$$

مثال (٢): إذا كانت $y = \sin x^2$ أوجد $\frac{dy}{dx}$.

الحـــل: نضع $x^2 = z$ فيكون $y = \sin z$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos z \,.\, 2x$$

$$= 2x \cos z$$

$$= 2x \cos x^2$$

أي أن:

$$\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u \frac{du}{dx}$$

وذلك إذا كانت الزاوية u دالة في المتغير x.

تدريب: أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال:

$$\cos\sqrt{x} \quad , \quad \tan x^3 \quad , \quad \sqrt{\sin x}$$

مشتقة الدوال المثلثية العكسية:

الدالة $y = \sin^{-1} x$ هي الدالة العكسية للدالة $x = \sin y$ كما ذكرنا من قبل ولإيجاد المشتقة الأولى للدالة $y = \sin^{-1} x$ فإننا نعتبر الدالة $x = \sin y$ وبتفاضل هذه المعادلة بالنسبة إلى المتغير x فإن:

$$1 = \cos y \frac{dy}{dx} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

وإذا كانت x في المعادلة الأخيرة عبارة عن دالة u (x) فإن:

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

وبالمثل يمكن الحصول على باقي المشتقات في الحالة العامة.

تدريب: أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية:

$$y = \sin^{-1}\frac{x}{a} \quad , \quad y = \cos^{-1}\frac{x}{a} \quad , \quad y = \tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{cosec}^{-1} x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

مثال: إذا كانت $y = \tan^{-1} \frac{1-x}{1+x}$ فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \cdot \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$

مشتقة الدالة اللوغاريتمية والدالة الأسية:

إذا كانت:

$$y = \log x$$

فإن

$$\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\log u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

يمكن إثبات ذلك من المبادئ الأولية كما سبق في الحالات السابقة.

مثال (١): إذا كانت:

$$y = \log(2 - 3x^6)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-18x^5}{2 - 3x^6}$$

مثال (٢): إذا كانت:

$$y = \log(\sec x + \tan x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x} = \sec x$$

مثال (٣): أوجد المشتقة الأولى للدالة:

$$y = \log\sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$$

قبل إيجاد المشتقة الأولى سوف نكتب الدالة على الصورة:

$$y = \frac{1}{2}\log(1 + \sin x) - \frac{1}{2}\log(1 - \sin x)$$

وذلك لأن:

$$\log\frac{a}{b} = \log a - \log b$$

$$\log x^n = n \log x$$

وعلى ذلك فإن:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\frac{\cos x}{1+\sin x}-\frac{1}{2}\frac{-\cos x}{1-\sin x}$$

بالاختصار نجد أن:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x}{2(1+\sin x)}+\frac{\cos x}{2(1-\sin x)}=\sec x$$

الدالة الأسية:

$$y=a^{x}$$

لإيجاد تفاضل هذه الدالة نأخذ لوغاريتم الطرفين:

$$\log y=x\log a$$

وبإجراء التفاضل:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\log a$$

$$\frac{dy}{dx}=y\log a=a^{x}\log a$$

وعندما تكون $y=e^{x}$ فإن:

$$\frac{dy}{dx}=e^{x}\log a=e^{x}$$

ذلك لأنَّ $\log_{e}e=1$.

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(e^{x}\right)=e^{x}$$

وإذا كانت $y=e^{u}$ حيث u دالة في x فإن:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{u}\right)=e^{u}\frac{du}{dx}$$

مثال: -

$$\text{(i) } \frac{d}{dx}\left(e^{\sin x}\right)=e^{\sin x}.\cos x$$

$$\text{(ii) } \frac{d}{dx}\left(e^{x^2+5x+1}\right)=(2x+5)e^{x^2+5x+1}$$

ملاحظة:

هناك بعض المسائل التي يتحتم فيها أخذ اللوغاريتم قبل إجراء عملية التفاضل كما في الحالات الآتية:

١- دالة أسية الأس متغير والأساس متغير.

٢- دالة كسرية مكونة من عوامل كثيرة.

مثال (١):

$$y=(1+\sin x)^{x}$$

$$\log y = x\log(1+\sin x)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=x.\frac{\cos x}{1+\sin x}+\log(1+\sin x)$$

$$\frac{dy}{dx}=y\left[\frac{x\cos x}{1+\sin x}+\log(1+\sin x)\right]$$

$$(1+\sin x)^{x}\left[\frac{x\cos x}{1+\sin x}+\log(1+\sin x)\right]$$

مثال (٢):

$$y=\frac{\left(x^{8}-5\right)^{1/3}\left(x^{9}+3\right)^{1/7}}{\left(\cos^{2}+1\right)^{3}\left(x^{3}+2\right)^{8}}$$

لتسهيل إيجاد المشتقة الأولى في هذه الحالة يفضل أخذ لوغاريتم الطرفين والاستفادة من خواص اللوغاريتمات.

$$\log y=\frac{1}{3}\log\left(x^{8}-5\right)+\frac{1}{7}\log\left(x^{9}+3\right)$$
$$-3\log\left(1+\cos^{2}x\right)-8\log\left(x^{5}+2\right)$$

وبتفاضل طرفي المعادلة نحصل على:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}\left(\frac{8x^{7}}{x^{8}-5}\right)+\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{9x^{8}}{x^{9}+3}\right)$$
$$-3\left(\frac{-2\cos x\sin x}{1+\cos^{2}x}\right)-8\left(\frac{5x^{4}}{x^{5}+2}\right)$$

بالضرب في y نحصل على $\frac{dy}{dx}$.

تسمى طريقة إيجاد التفاضل السابقة بطريقة التفاضل اللوغاريتمي.

ملخص لبعض قوانين التفاضل:

الدالة y	تفاضلها $\frac{dy}{dx}$
y = constant	0
$y = u^n$	$n\,u^{n-1}\frac{du}{dx}$
$y = \frac{1}{u}$	$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx}$
$y = \sqrt{u}$	$-\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot\frac{du}{dx}$
$y = e^u$	$e^u\frac{du}{dx}$
$y = a^x$	$a^x \log a$
$y = \log u$	$\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$
$y = \log_a u$	$\frac{1}{u}\log_a e\frac{du}{dx}$

الدالة y	تفاضلها $\frac{dy}{dx}$
$y = \sin u$	$\cos u\frac{du}{dx}$

$y = \cos u$	$-\sin u \dfrac{du}{dx}$
$y = \tan u$	$\sec^2 u \dfrac{du}{dx}$
$y = \cot x$	$-\operatorname{cosec}^2 x$
$y = \sec x$	$\sec x \tan x$
$y = \operatorname{cosec} x$	$-\operatorname{cosec} x \cot x$

الدالة y	تفاضلها $\dfrac{dy}{dx}$
$y = \sin^{-1} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \cos^{-1} x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$
$y = \tan^{-1} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$y = \cot^{-1} x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$
$y = \sec^{-1} x$	$\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$y = \operatorname{cosec}^{-1} x$	$\dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

في الجدول السابق اعتبرنا أن الدالة u دالة في المتغير x واستخدمنا قانون دالة الدالة:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

اشتقاق الدوال الزائدية:

تعريف الدوال الزائدية: إذا كان u عددًا حقيقيًا، باستثناء ما أشير إليه، فإن:

$$\sinh u=\frac{e^{u}-e^{e-u}}{2} \qquad \coth u=\frac{1}{\tanh u}=\frac{e^{u}+e^{-u}}{e^{u}-e^{e-u}} \quad ,(u\neq 0)$$

$$\cosh u=\frac{e^{u}+e^{e-u}}{2} \qquad \operatorname{sech} u=\frac{1}{\cosh u}=\frac{2}{e^{u}+e^{e-u}}$$

$$\tanh u=\frac{\sinh u}{\cosh u}=\frac{e^{u}-e^{-u}}{e^{u}+e^{-u}} \qquad \operatorname{csch} u=\frac{1}{\sinh u}=\frac{2}{e^{u}-e^{-u}} \quad (u\neq 0)$$

صيغ الاشتقاق: إذا كانت U دالة قابلة للاشتقاق في x فإن:

$$\frac{d}{dx}(\sinh u)=-\cosh u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh u)=\sinh u\frac{du}{dx}$$

تعاريف الدوال الزائدية العكسية:

$$\sinh^{-1}u=\ln\left(u+\sqrt{1+u^{2}}\right),\ \text{all}\ u \qquad \coth^{-1}u=\frac{1}{2}\ln\frac{u+1}{u-1} \quad (u^{2}>1)$$

$$\cosh^{-1}u=\ln\left(u+\sqrt{1-u^{2}}\right),(u\geqq 1) \qquad \operatorname{sech}^{-1}u=\ln\frac{1+\sqrt{1-u^{2}}}{u}$$

$$(0<u\leqq 1)$$

$$\tanh^{-1} u = \frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}, \quad (u^2 < 1) \quad \operatorname{csch}^{-1} u = \ln\left(\frac{1}{u} + \frac{\sqrt{1+u^2}}{|u|}\right) (u \neq 0)$$

صيغ الاشتقاق: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x فإن:

$$\frac{d}{dx}(\sinh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \qquad (u > 1)$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1} u) = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx} \qquad (u^2 < 1)$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx} \qquad (u^2 > 1)$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1} u) = \frac{-1}{|u|\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \qquad (0 < u < 1)$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1} u) = \frac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx} \qquad (u \neq 0)$$

مسائل محلولة

١- برهن أن $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$

الحـــل:

$$\cosh^2 u - \sinh^2 u = \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{2u} + 2 + e^{-2u}\right) - \frac{1}{4}\left(e^{2u} - 2 + e^{-2u}\right) = 1$$

٢- استنتج $\frac{d}{dx}(\sinh u) = (\cosh u)\frac{du}{dx}$ حيث u دالة قابلة للاشتقاق في x.

الحـــل:

$$\frac{d}{dx}(\sinh u) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{u} - e^{-u}}{2}\right) = \frac{e^{u} + e^{-u}}{2}\frac{du}{dx} = \cosh u\frac{du}{dx}$$

٣- أوجد dy / dx في المسائل الأتية:

- $y = \sinh 3x$

--- $\frac{dy}{dx} = \cosh 3x \cdot \frac{d}{dx}(3x) = 3\cosh 3x$

- $y = \cosh\frac{1}{2}x$

--- $\frac{dy}{dx} = \sinh\frac{1}{2}x \cdot \frac{d}{dx}(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{2}\sinh\frac{1}{2}x$

- $y = \tanh\left(1 + x^2\right)$

--- $\frac{dy}{dx} = \text{sech}^2(1 + x^2) \cdot \frac{d}{dx}(1 + x^2) = 2x\,\text{sech}^2(1 + x^2)$

- $y = \coth\frac{1}{x}$

--- $\frac{dy}{dx} = -\text{csch}^2\frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}\text{csch}^2\frac{1}{x}$

- $y = x\,\text{sech}\,x^2$

--- $\frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{d}{dx}(\text{sech}\,x^2) + \text{sech}\,x^2 \cdot \frac{d}{dx}(x)$

$= x(-\text{sech}\,x^2 \tanh x^2)2x + \text{sech}\,x^2$

$$= -2x^2 \operatorname{sech} x^2 \tanh x^2 + \operatorname{sech} x^2$$

- $y = \operatorname{csch}^2(x^2+1)$

--- $\dfrac{dy}{dx} = 2\operatorname{csch}(x^2+1).\dfrac{d}{dx}\left[\operatorname{csch}\left(x^2+1\right)\right]$

$$= 2\operatorname{csch}(x^2+1)\left[-\operatorname{csch}\left(x^2+1\right)\coth\left(x^2+1\right).2x\right]$$

$$= -4x\operatorname{csch}(x^2+1)\coth\left(x^2+1\right)$$

- $y = \dfrac{1}{2}\sinh 2x - \dfrac{1}{2}x$

--- $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{4}(\cosh 2x)2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}(\cosh 2x - 1) = \sinh^2 x$

- $y = \ln\tanh 2x$

--- $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\tanh 2x}(2\operatorname{sech}^2 2x) = \dfrac{2}{\sinh 2x\cosh 2x} = 4\operatorname{csch}4x$

٤- استنتج (أ) $\sinh^{-1}x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ لجميع قيم x.

(ب) $\operatorname{sech}^{-1}x = \cosh^{-1}\dfrac{1}{x} = \ln\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$ عندما $0 < x \le 1$.

الحـــــل: (أ) لـــيكن $\sinh^{-1}x = y$ عندئــذ $x = \sinh y = \dfrac{1}{2}\left(e^y - e^{-y}\right)$ أو $e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$ ويحل هذه المعادلة بالنسبة لـ e^y نجـد $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$ لأن $e^y > 0$ وهكذا يكون $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

(ب) لــــيكن $sech^{-1} x = y$ عندئـــذ $\cosh y = \frac{1}{x}$ ، $x = \sec hy = \frac{1}{\cosh y}$أو

$y = \cosh^{1}\left(\frac{1}{x}\right) = \sec h^{-1}x$ كـــــــــــــذلك $x = \sec hy = \frac{2}{e^{y} + e^{-y}}$ و

$e^{2y} - 2e^{y} + x = 0$ وبحل هذه المعادلة بالنسبة لـ e^{y} نجـد $e^{y} = \frac{1 + \sqrt{1 - x^{2}}}{x}$

عندما $y \geq 0$ وهكذا نجد $y = \ln\frac{1 + \sqrt{1 - x^{2}}}{x}$ عندما $0 < x \leq 1$.

المشتقات من رتب أعلى Higher Order Derivatives:

إذا كانت $y = f(x)$ دالة قابلة للتفاضل،

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

وكانت $f'(x)$ نفسها قابلة للتفاضل فإنه يمكننا حساب مشتقتها $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ وهذه نسميها المشتقة الثانية للدالة y. ويمكننا أن نكرر هذه العملية لنحصل على مشتقات من رتــب أعلى ويرمز لهذه المشتقات برموز كثيرة منها:

المشتقة الأولى:

$$\frac{dy}{dx} \quad , \quad \frac{d}{dx}y \quad , \quad y' \quad , f'(x)$$

المشتقة الثانية:

$$\frac{d^{2}y}{dx^{2}} \quad , \quad \frac{d^{2}}{dx^{2}}y \quad , \quad y'' \quad , f''(x)$$

....

المشتقة النونية:

$$\frac{d^n y}{dx^n} \quad , \quad \frac{d^n}{dx^n} y \quad , \quad y^{(n)} \quad , f^{(n)}(x)$$

مثال (١): أوجد المشتقات من كل الرتب للدالة $y = x^n$ ، حيث n عدد صحيح موجب

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}$$

....

$$\frac{d^r y}{dx^r} = n(n-1)...(n-r+1)x^{n-r}$$

....

$$\frac{d^n y}{dx^n} = n(n-1)......2.1 = n!$$

$$\frac{d^k y}{dx^k} = 0 \quad ; \quad k > n$$

نظرية ليبنز Leibniz Theorem:

تعطى هذه النظرية قانونا لحساب المشتقة من الرتبة n لحاصل ضرب دالتين فإذا كانت U , V دالتين لـ x ورمزنا لمشتقات U بالرموز ... , U_1 , U_2 وبالمثل لمشتقات V فإن:

$$(UV)_n = U_n V + \binom{n}{1} U_{n-1} V_1 + \binom{n}{2} U_{n-2} V_2 + ... + UV_n$$

حيث $\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!}$ هي نفسها معاملات ذات الحدين.

البرهان: إذا كانت $n = 1$ فمن قانون مشتقة حاصل ضرب دالتين نعلم أن:

$$(UV)_1 = U_1 V + U V_1$$

نفرض بعد ذلك صحة القانون عندما $n = k$، أي نفرض أن:

$$(UV)_k = U_k V + \binom{k}{1} U_{k-1} V_1 + \binom{k}{2} U_{k-2} V_2 + \ldots + U V_k$$

وبإيجاد مشتقة الطرفين ينتج أن:

$$(UV)_{k+1} = (U_{k+1} V + U_k V_1) + \binom{k}{1}(U_k V_1 + U_{k-1} V_2) + \binom{k}{2}(U_{k-1} V_2 + U_{k-2} V_3) + \ldots + (U_1 V_k + U V_{k-1})$$

$$= U_{k+1} V + \left[1 + \binom{k}{1}\right] U_k V_1 + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{2}\right] U_{k-1} V_2 + \ldots + U V_{k+1}$$

حيث أن:

$$\binom{k}{r} + \binom{k}{r+1} = \binom{k+1}{r+1}$$

إذن:

$$(UV)_{k+1} = U_{k+1} V + \binom{k+1}{1} U_k V_1 + \binom{k+1}{2} U_{k-1} V_2 + \ldots + U V_{k+1}$$

أيضًا عندما $n = k + 1$ إذن من قاعدة الاستنتاج الرياضي ينتج أنها صحيحة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة.

مثال: أوجد المشتقة الرابعة للدالة $y = \frac{x^2}{1+x}$.

الحـــل: بوضع:

$$U = \frac{1}{1+x}, V = x^2$$

فإن $V_1 = 2x, V_2 = x^2$ ومشتقات V الأعلى من ذلك تنعدم. ومن مثال (٢) نجد أن:

$$U_4 = \frac{-4!}{(1+x)^5} \quad , \quad U_3 = \frac{3!}{(1+x)^4} \quad , \quad U_2 = \frac{-2!}{(1+x)^3}$$

إذن بتطبيق نظرية ليبنز ينتج أن:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{-4!}{(1+x)^5}x^2 + 4\frac{3!}{(1+x)^4}(2x) + 6\frac{-2!}{(1+x)^3}(2)$$

وتنعدم الحدود التالية لذلك حيث أن $V_3 = V_4 = 0$ إذن:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{24x^2}{(1+x)^5} + \frac{48x}{(1+x)^4} - \frac{24}{(1+x)^3} = \frac{-24}{(1+x)^5}$$

ونلاحظ أن هذا الناتج نستطيع الحصول عليه بطريقة أخرى كالآتي:

$$y = \frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d^4}{dx^4}\left(x - 1 + \frac{1}{1+x}\right)$$

$$= \frac{d^4}{dx^4}\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{-4!}{(1+x)^5}$$

تمارين

(١) أوجد (أ) المشتقة الثالثة للدالة $\sqrt[5]{x^3}$.

(ب) المشتقة الرابعة للدالة $x^{5/3}$.

(ج) المشتقة الثالثة للدالة $x^3/(x-1)$.

(د) المشتقة السادسة للدالة $(4x-5)\left(2x^3+1\right)(x+6)^2$.

(٢) أوجد المشتقة النونية للدالة:

$$\frac{ax+b}{cx+d}$$

حيث a, b, c, d مقادير ثابتة، $ad-bc \neq 0$.

(٣) حقق كلا من المتطابقات الآتية:

$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$$

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right]$$

$$\frac{x^4+1}{x^3-x}=x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$$

ومن ثم أوجد المشتقة من الرتبة n لكل من الدوال:

$$\frac{1}{x(x+1)}, \frac{1}{x^2-1}, \frac{x^4+1}{x^3-x}$$

حيث $n > 1$.

(٤) بتطبيق نظرية ليبنز أوجد المشتقة الرابعة للدالة:

$$x^3(1+x)^5$$

(٥) إذا كانت:

$$y=\left[x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right]^n$$

برهن على أن:

$$(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-n^2y=0$$

وبتطبيق نظرية ليبنز استنتج أن:

$$(1+x^2)\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}+(2n+1)x\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}=0$$

الدوال الضمنية Implicit Functions:

إذا أعطيت معادلة في متغيرين x , y مثل:

$$x^2+y^2=4$$

أو:

$$x^5y+xy^5=2$$

فإن هذه المعادلة تعرف دالة f لأنه إذا أعطيت قيمة لـ x فإنه يمكن من المعادلة اختيار قيمة لـ y تناظرها. وهذه الصورة الدالة تعرف باسم الدالة الضمنية. وقد يمكن

في بعض الأحيان كما في المثال الأول حل المعادلة للحصول على الدالة في الصـــورة الصريحة:

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

أو:

$$y = -\sqrt{4 - x^2}$$

أما في المثال الثاني فإن الحصول على دالة صريحة أمر غير ممكن.

ولإيجاد مشتقة الدالة الضمنية أي إيجاد $\frac{dy}{dx}$ من المعادلة المــذكورة يمكــن حســاب مشتقتي طرفي المعادلة ومساواتهما مع مراعاة أن مشتقة y^5 مثلاً نحصل عليها مــن قانون دالة الدالة كالآتي:

$$\frac{d}{dx}y^5 = \frac{d}{dx}y^5\frac{dy}{dx} = 5y^4\frac{dy}{dx}$$

إذن من المعادلة نجد أن:

$$\frac{d}{dx}\left(x^5y + xy^5\right) = \frac{d}{dx}(2)$$

$$x^5\frac{dy}{dx} + 5x^4y + 5xy^4\frac{dy}{dx} + y^5 = 0$$

$$\left(x^5 + 5xy^4\right)\frac{dy}{dx} = -5x^4y - y^5$$

ومنها ينتج أن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\left(5x^4 + y^4\right)}{x\left(x^4 + 5y^5\right)}$$

تمارين

(١) أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال الضمنية الآتية:

(i) $(x+y)^3+y=0$

(ii) $x^3+xy+y^2-x-y=0$

(iii) $x^4+y^4-xy=0$

(iv) $(x^2+y^2)^2-2xy=0$

(٢) أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال الآتية:

$\log(1-x^3)$, $\log\sqrt{1-x}$

$(1-x^2)\log\left(x^2+x\right)$, $\log(\log x)$

$\log\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$, $\log\frac{e^x-1}{e^x+1}$

(٣) باستخدام طريقة التفاضل اللوني اللوغاريتمي أوجد المشتقة الأول للدوال الآتية:

$(\log x)^{\tan 2x}$, $(\cos x)^{1-x}$

(٤) إذا كانت $y=e^{-x}\sin x$ أثبت أن:

$y''+2y'+2y=0$

(٥) أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال الضمنية الآتية:

$x^2\log y=e^x$, $y^3=\sin(x+y)$

$3xy+a^x=0$, $\sqrt{x}-\sqrt{y}=3$

الفصل الثالث

القيم العظمى والصغرى ورسم المنحنيات

الدوال المتزايدة والدوال المتناقصة:

نقول عن الدالة $f(x)$ أنها متزايدة عند $x = x_0$. إذا كان عند h الموجبة والصغيرة بقدر كاف، $f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$ ونقول عن دالة $f(x)$ أنها متناقصة عند $x = x_0$ إذا كان عند h، الموجبة والصغيرة بقدر كاف $f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$.

إذا كان $f'(x_0) > 0$ فإن $f(x)$ دالة متزايدة عند $x = x_0$ وإذا كان $f'(x_0) < 0$ فعندئذ تكون $f(x)$ دالة متناقصة عند $x = x_0$. أما إذا كان $f'(x_0) = 0$ فإننا نقول أن $f(x)$ مستقرة عند $x = x_0$.

ونقول عن دالة غير ثابتة أنها متزايدة (متناقصة) في فترة ما إذا كانت متزايدة (متناقصة أو مستقرة) في كل نقطة من نقط الفترة.

القيم العظمى والصغرى النسبية لدالة:

نقول عن دالة $y = f(x)$ أن لها قيمة عظمى نسبية (صغرى نسبية) عند $x = x_0$. إذا كانت $f(x_0)$ أكبر (أصغر) من قيم الدالة السابقة واللاحقة مباشرة.

إذا كانت $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق على $a \le x \le b$ وكـان لـــ $f(x)$ قيمــة عظمى (صغرى) نســبية عنــد $x = x_o$ حيــث $a < x_o < b$ فعندئــذ يكــون $f'(x_o) = 0$.

ولإيجاد القيم العظمى (الصغرى) النسبية [سنطلق عليها من الآن قيمًا عظمى (صغرى)] لدالة $f(x)$ هي ومشتقتها الأولى مستمران:

اختبار المشتقة الأولى:

١- حل المعادلة $f'(x) = 0$ للحصول على القيم الحرجة.

٢- حدد مواضع القيم الحرجة على محور عددي مكونًا بذلك عددًا من الفترات.

٣- حدد إشارة $f'(x)$ على كل فترة.

٤- اجعل لـ $f(x)$ قيمة عظمى نسبية (تساوي $f(x_o)$) إذا تغيرت $f'(x)$ من + إلى -.

يكون لـ $f(x)$ قيمة صغرى نسبية (تساوي $f(x_o)$) إذا تغيــرت $f'(x)$ من - إلى +.

لا يكون لـ $f(x)$ قيمة عظمى أو صغرى عند $x = x_o$ إذا لم تغير $f'(x)$ إشارتها. نسمى القيم $x = x_o$ التي يكون عندها الدالة $f(x)$ معرفة ولكن مشتقتها $f'(x)$ غير موجودة بالقيم الحرجة للدالة. وينبغي أن نستعمل هذه القيم مع القيم التي عندها $f'(x_o) = 0$ لتحديد الفترات المذكورة في الخطوة ٢ السابقة الذكر.

اتجاه الانحناء: نقول عن قوس من منحنى $y = f(x)$ أنه مقعر لأعلى عند نقطة من نقطة إذا وقع القوس فوق مماسه عند تلك النقطة. عندما تتزايد x فغما أن تبقى $f'(x)$ محافظة على إشارتها وتكون متزايدة أو أنها تغير إشارتها من السالبة إلى الموجبة وفي كلا الحالتين يكون الميل $f'(x)$ متزايد وتكون $f''(x) > 0$.

ونقول عن قوس منحنى $y = f(x)$ أنه مقعر لأسفل إذا وقع القوس، عند كل نقطة من نقطة تحت مماسه عند تلك النقطة وهنا عندما تتزايد x إما أن تبقى $f'(x)$ محافظة على إشارتها وتكون متزايدة أو أنها تغير إشارتها من السالبة إلى الموجبة وفي كلا الحالتين يكون الميل $f'(x)$ متناقصًا وتكون $f''(x) < 0$.

نقطة الانقلاب: هي نقطة يتغير المنحنى عندها من مقعر لأعلى إلى مقعر لأسفل أو بالعكس. ويكون المنحنى $y = f(x)$ نقطة من نقطة $x = x_0$ كنقطة انعطاف له. إذا كانت $f''(x_0) = 0$ أو أنها غير معرفة. إذا غيرت $f''(x)$ إشارتها عندما تتزايد x عبر $x = x_0$. ويمكن أن نستبدل بالشرط الأخير الشرط $f'''(x_0) \neq 0$ عندما توجد $f'''(x_0)$.

الاختبار الثاني للقيم العظمى والصغرى. اختبار المشتقة الثانية:

١- حل المعادلة $f'(x) = 0$ لإيجاد القيم الحرجة.

٢- عند القيمة الحرجة $x = x_0$ يكون:

لـ $f(x)$ قيمة عظمى (تساوى $f(x_0)$) إذا كانت $f''(x_0) < 0$.

لـ $f(x)$ قيمة عظمى (تساوي $f(x_o)$) إذا كانت $f''(x_o) > 0$.

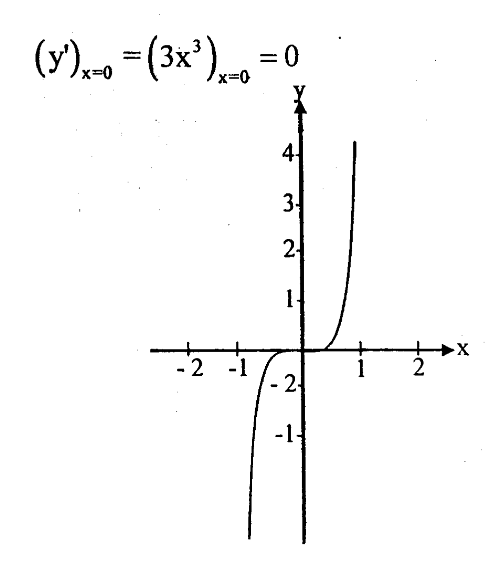
ويفشل الاختبار إذا كانت $f''(x_o) = 0$ أو غير محددة. وينبغـــي فـــي الحالـــة الأخيرة استعمال طريقة المشتقة الأولى.

الشرط الضروري لوجود نهاية:

إذا كانت الدالة $y = f(x)$ قابلة للتفاضل وكان لها نهاية عظمى أو صـــغرى عند $x = a$ فإن المماس لمنحنى الدالة يكون أفقيًا عند هذه القيمة وبالتالي تنعـــدم المشتقة عند $x = a$ أي أن $f'(a) = 0$.

ويلاحظ أن عكس ذلك ليس صحيحًا لأن انعدام المشتقة الأولى عند نقطة ما لا يعني سوى أن المماس للمنحنى عند هذه النقطة يكون أفقيًا وهو ما قد يحدث دون وجود نهاية عظمى أو صغرى فمثلاً في منحنى الدالة $y = x^3$ والمبين بالشـــكل التالي نلاحظ عدم وجود نهاية عظمى أو صغرى عند $x = 0$ بينها تنعدم المشتقة عند هذه القيمة:

$$(y')_{x=0} = (3x^3)_{x=0} = 0$$



لذلك يقال أن انعدام المشتقة الأولى عند نقطة ما هو شرط ضروري ولكن غير كافي لوجود نهاية.

ومن الحالات الأخرى التي قد تتواجد عندها نهايات عظمى أو صغرى هي النقط التي تكون عندها الدالة غير قابلة للاشتقاق كما يتضح من الأمثلة الآتية.

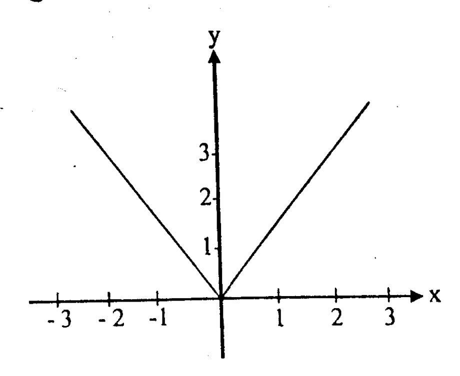
الشرط الكافي لوجود نهاية وتحديد نوع النهاية:

من الواضح أنه لضمان وجود نهاية عظمى (أو صغرى) للدالة $f(x)$ عند القيمة الحرجة $x = a$ لابد أن تكون الدالة متزايدة على يسار هذه النقطة ومتناقصة على يمينها (أو العكس).

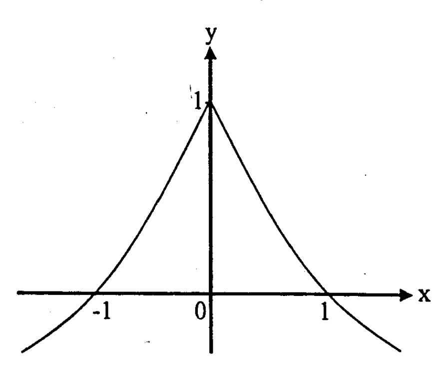
مثال (١): الدالة $y = |x|$ والتي يمكن تعريفها كالآتي:

$$y = x \quad , \quad x \geq 0$$
$$y = -x \quad , \quad x < 0$$

ليس لها مشتقة عند $x = 0$ لأن منحنى الدالة ليس له مماس محدد عند تلك النقطة إلا أن هذه الدالة لها نهاية صغرى هناك لأن $y = 0$ عندما $x = 0$ في حين أنه عند أية نقطة أخرى $x \neq 0$ نجد أن $y > 0$ كما يتضح من الشكل.



مثال (٢): الدالة $y = 1 - x^{2/3}$ ليس لها مشتقة عند $x = 0$ لأن $y' = -\frac{2}{3x^{1/3}}$ تكون لا نهائية عند $x = 0$ إلا أن الدالة لها نهاية عظمى عند هذه النقطة لأن $f(0) = 1$ بينها $f(x) < 1$ لأي $x \neq 0$ كما بالشكل.



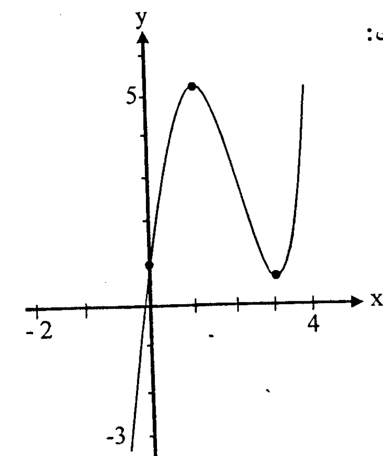
مثال (٣): أوجد جميع النهايات العظمى والصغرى للدالة $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

الحل: نوجد المشتقة الأولى $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$ لذلك تنعدم المشتقة الأولى عند $x = 1$, $x = 3$ وحيث أن الدالة مستمرة والمشتقة تتواجد لجميع قيم x فلا توجد قيمًا حرجة أخرى.

نختبر إشارة $f'(x)$ على يمين ويسار كل نقطة حرجة وندون النتائج كما الجدول التالي:

Sign of $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$		
$x < 1$	$1 < x < 3$	$x > 3$
+	-	+

ومنه نستنتج أن الدالة متزايدة في الفترة $(-\infty,1)$ ثـم متناقصة فـي الفترة $(1\ ,\ 3)$ ومتزايدة في الفترة $(3,\infty)$ لذلك:



توجد نهاية عظمى عند $x = 1$ قيمتهـا هي $(y)_{x=1} = 5$.

وتوجد نهاية صغرى عند $x = 3$ قيمتها هي $(y)_{x=3} = 1$.

كما هو مبين بالشكل.

مثـال (٤): اختبـر مـن حيـث النهايـات العظمـى والصـغرى الدالـة $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$.

الحـل: حيث أن الدالة دورية ودورتها 2π فإنه يكفي اختبار الدالة في الفتـرة $[0,2\pi]$ نوجد المشتقة الأولى:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\cos x - 2\sin 2x \\ &= 2\cos x - 4\sin x\cos x \\ &= 2\cos x(1 - 2\sin x) \end{aligned}$$

توجد النقطة الحرجة عندما:

$$\cos x(1 - 2\sin x) = 0$$

وفي الفترة $[0,2\pi]$ فإن:

$$\cos x = 0$$

عندما:

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$\sin x = \frac{1}{2}$ عندما $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

نوجد المشتقة الثانية:

$$f''(x) = -2\sin x - 4\cos 2x$$

ثم نختبر النقط الحرجة:

$$(i)\ f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2.\frac{1}{2} - 4.\frac{1}{2} = -3 < 0$$

لذلك توجد عند $x = \frac{\pi}{6}$ نهاية عظمى قيمتها:

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2.\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$(ii)\ f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2.1 + 4.1 = 2 > 0$$

لذلك توجد عند $x = \frac{\pi}{2}$ نهاية صغرى قيمتها:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.1 - 1 = 1$$

$$(iii)\ f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -2.\frac{1}{2} - 4.\frac{1}{2} = -3 < 0$$

لذلك توجد عند $x=\frac{5\pi}{6}$ نهاية عظمى قيمتها:

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=2.\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$(iv)\ f''\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-2.(-1)-4.(-1)=6<0$$

لذلك توجد عند $x=\frac{3\pi}{2}$ نهاية عظمى قيمتها:

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2(-1)-1=-3$$

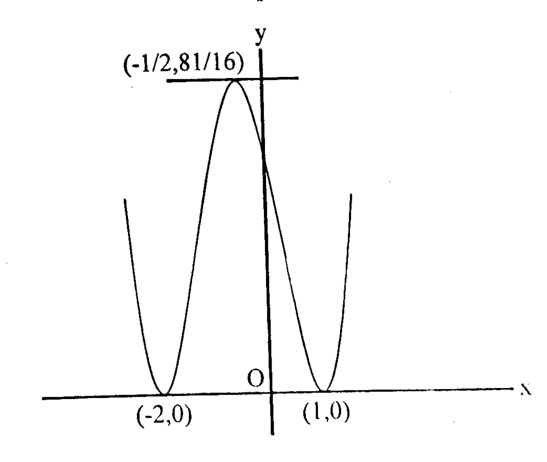
مثال (٥): بفرض $y=x^4+2x^3-3x^2-4x+4$ أوجد:

(أ) الفترات التي تتزايد أو تتناقص فيها y.

(ب) القيم العظمى والصغرى لـــ y:

الحـــل: $y'=4x^3+6x^2-6x-4=2(x+2)(2x+1)(x-1)$

بوضع $y'=0$ نجد أن القيم الحرجة هي $x=-2,-\frac{1}{2},1$.



(أ) عندما $x < -2$ فإن $y' = 2(-)(-)(-) = -$ وتكون y متناقصة.

عندما $-2 < x < -\frac{1}{2}$ فإن $y' = 2(+)(-)(-) = +$ وتكون y متزايدة.

عندما $-\frac{1}{2} < x < 1$ فإن $y' = 2(+)(+)(-) = -$ وتكون y متناقصة.

عندما $x > 1$ فإن $y' = 2(+)(+)(-) = -$ وتكون y متزايدة.

ويمكن توضيح ذلك بالرسم التالي:

$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < -\frac{1}{2}$	$x = -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
	قيمة صغرى		قيمة عظمى		قيمة صغرى	
$y' = -$ y متناقصة		$y' = +$ y متزايدة		$y' = -$ y متناقصة		$y' = +$ y متزايدة

(ب) لنختبر القيم الحرجة $x = -2, -\frac{1}{2}, 1$ بحثاً عن القيم العظمى الصغرى.

عندما تتزايد x مارة بـــ -2 فإن y' تغير إشارتها من – إلى + وبالتالي فإن لـــ y قيمة صغرى 0 عند $x = -2$.

عندما تتزايد x مارة بـــ $-\frac{1}{2}$ فإن y' تغير إشارتها من + إلى – وبالتالي فـــإن لـــ y قيمة عظمى 81/16 عند $x = -\frac{1}{2}$.

عندما تتزايد x مارة بـــ 1 فإن y' تغير إشارتها من – إلى + وبالتالي فإن لـــ y قيمة صغرى 0 عند $x = 1$.

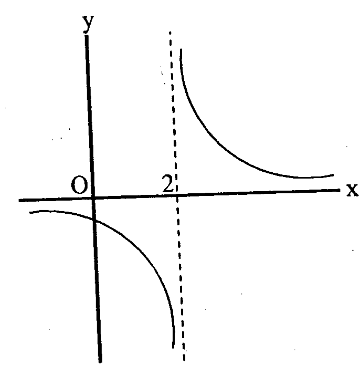
مثال (٦): بين أنه ليس للمنحنى $y = x^3 - 8$ قيمة عظمى أو صغرى.

الحـــل: $y' = 3x^2$ وإذا وضعنا $y' = 0$ نجد القيمة الحرجة $x = 0$.

وسواء كان $x < 0$ أو $x > 0$ فإن $y' > 0$ وليس لـــ y قيمة عظمى أو صـــغرى ولكن للمنحنى عند $x = 0$ نقطة انعطاف.

مثال (٧): اختبر $y = f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ للحصول على القيم العظمى والصغرى، وحدد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة ومتناقصة.

الحـــل: $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^2}$ وحيث أن $f(2)$ غير معرفة.



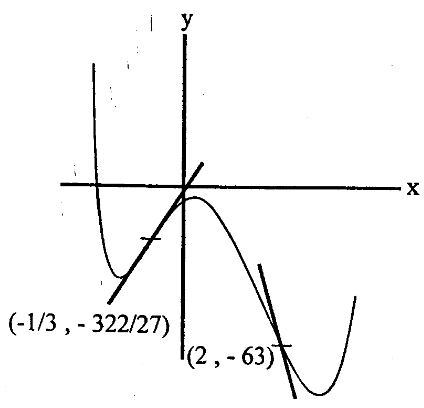
أي أن $f(x)$ تصبح غير محددة عندمـــا تقترب من 2) فإنه ليس هنـــاك نقـــط حرجة، ومع ذلك نستخدم $x = 2$ لتحديد فترات تزايد $f(x)$ وتناقصها.

$f'(x) < 0$ لجميع قيم $x \neq 2$. وبالتالي فإن $f(x)$ تتناقص في الفترتين $x < 2$ و $x > 2$.

مثال (٨):

اختبر $y=12x^3-30x^2-24x+12$ لمعرفة اتجاه الانحناء ولتعيين نقــط (الانقلاب).





$$y'=12x^3-30x^2-24x+12$$

$$y''=36x^2-60x-24=12(3x+1)(x-2)$$

ضع $y''=0$ وحل هذه المعادلة تحصل على النقط التي يحتمل أن تكون نقــط انقلاب وهى $x=-1/3,2$.

وعندما $x<-1/3$ نجد $y''=+$ والقوس مقعرًا لأعلى.

وعندما $-1/3<x<2$ نجد $y''=-$ والقوس مقعرًا لأسفل.

وعندما $x>2$ نجد $y''=+$ والقوس مقعرًا لأعلى.

مثال (٩): أوجد معادلات المماسات عند نقط الانقلاب للمنحنى.

الحــل:

$$y=x^4-6x^3++12x^2-8x$$

$$f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 8$$

$$f''(x) = 12x^2 - 36x + 24 = 12(x-1)(x-2)$$

$$f'''(x) = 24x - 36 = 12(2x-3)$$

ونقطتا الانعطـــاف الممكنتـــان همـــا عنـــد $x = 1,2$ وبمـــا أن $f'''(2) \neq 0$ ، $f'''(1) \neq 0$ فالنقطتان (0 , 2) و (1- , 1) هما نقطتا انعطاف. وبما أن الميـــل عند (1- , 1) هو $m = f'(1) = 2$ فمعادلة المماس تكون.

$y - y_1 = m(x - x_1)$ أو $y + 1 = 2(x-1)$ أو $y = 2x - 3$ والمـــيل عنـــد (2 , 0) هو $f'(2) = 0$ ومعادلة المماس هي $y = 0$.

مثال (١٠): اختبر $f(x) = x(12-2x)^2$ للحصـــول علـــى القـــيم العظمـــى والصغرى مستخدمًا طريقة المشتقة الثانية.

(أ) $f'(x) = 12(x^2 - 8x + 12) = 12(x-2)(x-6)$ والقيم الحرجة هـــي $x = 2,6$.

(ب) $f''(x) = 12(2x-8) = 24(x-4)$.

(ج) إن $f''(2) < 0$ وبالتالي فللدالة $f(x)$ قيمة عظمى 128 عند $x = 2$.

وأن $f''(6) > 0$ وبالتالي فللدالة $f(x)$ قيمة صغرى 0 عند $x = 6$.

مثال (١١): ارسم منحن الدالة $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

الحـــل:

١- المقاطع: بوضع $x = 0$ نحصل على $y = 1$.

بوضع $y = 0$ نحصل على $x^3 - 6x^2 + 9x + 1 = 0$.

وهي مَعادلة يصعب حلها لذا لن نعتمد على معطياتها.

٢- التماثل: الدالة ليست زوجية ولا فردية لأنها المجموع الجبري لدوال زوجية وفردية.

٣- مجال تعريف الدالة: الدالة معرفة لجميع قيم x لأن الدالة كثيرة حدود وكثيرات الحدود معرفة لجميع قيم x.

٤- المدى: هو جميع قيم y.

٥- سلوك المنحنى في مالا نهاية:

$$\lim_{x \to -\infty} y = -\infty \qquad \lim_{x \to \infty} y = \infty$$

وليس لمنحنيات كثيرات الحدود خطوط تقاربية.

٦- النهايات العظمى والصغرى:

$$y' = 3x^2 - 12x + 9$$

والمشتقة تنعدم عند:

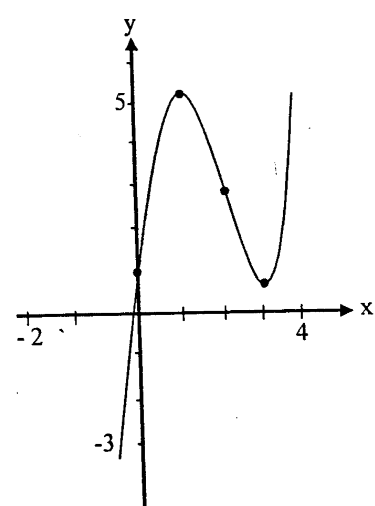
$$3x^2 - 4x + 3 = 3(x-3)(x-1) = 0$$

أي عند $x = 1$, $x = 3$. أي أن النهايات كالآتي:

النقطة (5 , 1) هي نقطة نهاية عظمى. والنقطة (1 , 3) هي نقطة نهاية صغرى. ونقطة الانقلاب عند $y'' = 0$.

$$\therefore y'' = 3(2 \times -4) = 0$$

أي عند النقطة $(2\ ,3)$.



مثال (١٢): ارسم منحنى الدالة:

$$y = \frac{x^2 - x}{(x+1)(x-2)^2}$$

الحــل:

١- المقاطع: بوضع $x = 0$ نحصل على $y = 0$.

بوضع $y = 0$ نحصل على $x^2 - x = x(x-1) = 0$ أي أن $x = 1$, $x = 0$.

٢- التماثل: الدالة ليست زوجية أو فردية وبالتالي لا يوجد تماثل.

٣- مجال تعريف الدالة: الدالة معرفة لجميع قيم x عدا x = 2 , x = -1 ومدى الدالة يصعب الحصول عليه وإن كانت كما سيتضح من الرسم الذي سنتمكن من الحصول عليه هو جميع قيم y.

٤- سلوك المنحنى في مالا نهاية:

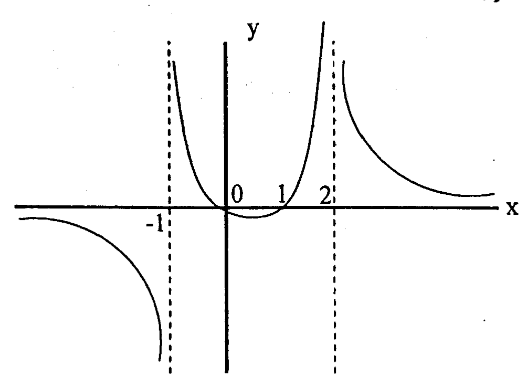
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x}{(x+1)(x-2)^2}=0 \qquad , \qquad \lim_{x\to-\infty} y=0$$

أي أن y = 0 هو خط تقاربي لمنحنى الدالة في كلا الاتجاهين وكذلك:

$$\lim_{x\to-1} y=\infty \qquad , \qquad \lim_{x\to 2} y=-\infty$$

أي أن x = -1 , x = 2 هي أيضًا خطوط تقاربية.

٥- النهايات العظمى والصغرى للدالة: يمكن الحصول عليها بالتفاضل الذي سيؤدي إلى ظهور معادلة من الدرجة الثالثة يصعب حلها ويمكننا رسم منحنى الدالة دون الحاجة لإيجاد النهايات المحلية.



مثال(١٣): ارسم منحنى الدالة $y^2 = x^4 - x^2$.

الحـــل:

١- المقاطع: بوضع $x = 0$ نحصل على $y = 0$.

بوضع $y = 0$ نحصل على $x^2\left(x^2 - 1\right) = 0$ أي أن $x = -1 , 0 , 1$ وعليه فالمقاطع هي:

$(-1 , 0) , (0 , 0) , (1 , 0)$

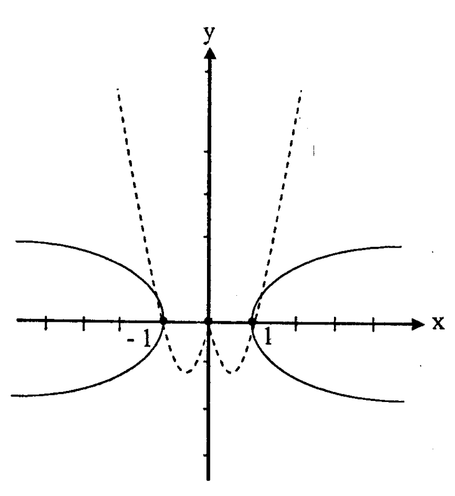
٢- التماثل: الدالة زوجية حيث أن $f(x) = \pm\sqrt{x^4 - x^2}$ هي دالة زوجية ومن ثم متماثلة حول محور y. وأيضًا الدالة $y^2 = f(x)$ متماثلة حول محور x.

٣- مجال التعريف: تكون الدالة معرفة عندما تكون y^2 موجبة على هـــذا فـــإن الدالة لا تكون معرفة في الفترة $-1 < x < 1$ عدا $x = 0$ فإنها تمثل نقطة منعزلة على منحنى الدالة.

٤- المدى: هو جميع قيم y.

٥- ليس للمنحنى خطوط تقاربية $\lim\limits_{x\to-\infty} y^2 = \infty = \lim\limits_{x\to\infty} y^2$.

لرسم منحنيات الدوال $y^2 = f(x)$ ليست الحاجة كبيـــرة لإيجـــاد النهايـــات المحلية.



مثال (١٤): ارسم منحنى الدالة $y = e^{-x^2}$.

الحــل:

١- بوضع $x = 0$ نحصل على $y = 1$ ومن ثم فإن النقطة $(0 , 1)$ تقع علــى منحنى الدالة.

٢- التماثل: بما أن $f(x) = e^{-x^2} = f(-x)$ وعلى هذا فإن الدالة زوجية.

٣- مجَال تعريف الدالة: الدالة معرفة لجميع قيم x.

٤- مدى الدالة: بما أن e^{-x^2} موجبة دائمة وبما أنها تقل في القيمة بزيادة قــيم x الموجبة من ثم فإن مدى الدالة هو الفترة $(0 , 1)$.

٥- سلوك المنحنى في مالا نهاية: بما أن:

$$\lim_{x \to \infty} y = \lim_{x \to \infty} e^{-x^2} = 0 = \lim_{x \to -\infty} e^{-x^2}$$

من ثمَ فإن $y = 0$ يكون خطًا تقاربيًا لمنحنى الدالة من الجهتين.

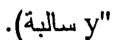
٦- النهايات العظمى والصغرى: بما أن:

$$y' = -2xe^{-x^2}$$

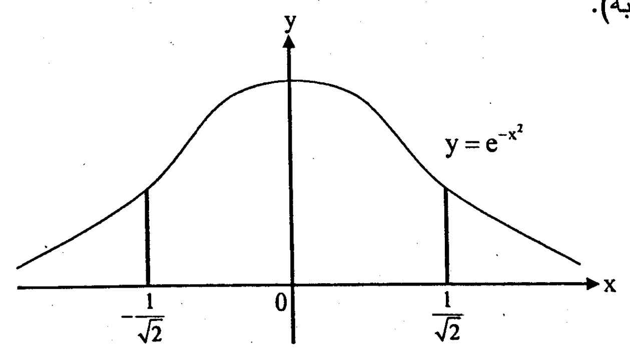
تنعدم عند $x = 0$ ومن ثم فإن النقطة $(0 , 1)$ هي النقطة الحرجة لمنحنى الدالــة وبما أن $y'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$. تكون سالبة عند $x = 0$ وعلى هذا فإن النقطة $(0 , 1)$ هي نقطة نهاية عظمى. أما نقطة الانقلاب فنحصل عليها من:

$$y'' = 0 = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$$

أي $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ منحنى الدالة يكون محدبًا في الفترة $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ (حيث



y'' سالبة).



تمارين

ارسم منحنيات الدوال الآتية:

1- $y = 2x^3 - x^2 - 4x + 2$

2- $y = x^4 - 18x^2$

3- $y = x^3 - x^2$

4- $y = 3x^5 - 5x^3$

5- $y = (x+1)^2 (x-3)^3$

6- $y = (x+2)^2 (x-2)^2$

7- $y = \sqrt{x}(x-1)$

8- $y = x\sqrt{1+x}$

9- $y = x^{2/3}(x-3)$

10- $y = (x-1)^{1/3}(x+3)^{2/3}$

11- $y^2 = x^4 - 4x^3$

12- $y^2 = \frac{x-1}{x^3}$

13- $y = \frac{x^2}{x-1}$

14- $y = \frac{x^2+1}{x}$

15- $y = \frac{x}{1+x}$

16- $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

17- $y = \sin 4x$

18- $y = \sin x \cos x$

19- $y = e^{2x+3}$

20- $y = x^2 e^x$

21- $y = \cos e^x$

22- $y = x \ln x$

23- $y = x \ln x - x$

24- $y = 1 + \ln(3-x)$

الفصل الرابع

تطبيقات هندسية وفيزيائية

مثال (١): تحت أي زاوية يتقاطع المنحنيان:

$$y = x^2 \quad , \quad y = x^3$$

الحـــل: من المعادلة التالية تنتج نقاط التقاطع:

$$x^2 = x^3 \Rightarrow x^2(1-x) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1$$

أ- ميلي مماسي المنحنيين عندما $x = 0$ ينتجان من المعادلتين:

$$y' = 2x \quad , \quad y' = 3x^2$$

والميلان هما:

$$m_1 = 0 \quad , \quad m_2 = 0$$

وقياس زاوية المماسين يساوي الصفر أي هما منطبقان.

ب- ميلي المماسين عندما $x = 1$ هو:

$$m_1 = y'(1) = 2 \quad , \quad m_2 = y'(1) = 3$$

وظل زاوية المماسين هو:

$$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{3-2}{1+6} = \frac{1}{7}.$$

ملاحظة: إذا تقاطع منحنيان c_1 , c_2 في نقطة M فإن مماسي هذين المنحنيين في النقطة M تسمى زاوية هذين المنحنيين في النقطة M.

وظل زاوية المماسين هو:

$$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

حيث m_1 , m_2 هما ميلا الماسين للمنحنيين عند النقطة M.

مثال (٢): حدد نقط المنحنى:

$$y^2 = 2x^3$$

حيث يتعامد المماس للمنحنى مع المستقيم $4x - 3y + 2 = 0$ ثم أوجد معادلة هذا المماس.

الحل: إن ميل المستقيم يساوي $4/3$، إذن ميل مماس المنحنى في النقطة المطلوبة:

$$m = -3/4$$

من الملاحظ أن المنحنى المفروض يمثل تطبيقين هما:

$$y = \sqrt{2}\, x^{3/2}$$

$$y = -\sqrt{2}\, x^{3/2}$$

ومن الواضح أن التطبيق الثاني يقبل مماسات ميلها سالب لأن:

$$y' = -3/2\sqrt{2}\, x^{1/2} \leq 0$$

للبحث عن النقطة المطلوبة نساوي بين y' المحسوبة سابقًا وبين العدد $-3/4$ فنحصل على المعادلة:

$$-3/2\sqrt{2}\, x^{1/2} = -3/4 \Rightarrow x = 1/8$$

وبالتالي فإن:

$$y=-\sqrt{2}\left(\tfrac{1}{8}\right)^{3/2}=\tfrac{1}{16}$$

فالنقطة المطلوبة هي $\left(\tfrac{1}{8},-\tfrac{1}{16}\right)$ ومعادلة المماس هي:

$$y+\tfrac{1}{16}=-\tfrac{3}{4}\left(x-\tfrac{1}{8}\right)$$

مثال (٣): عين معادلة مماس المنحنى الوسيطي:

$$x=\frac{1+t}{t^3}\quad,\quad y=\frac{3}{2t^2}+\frac{1}{2t}$$

عند النقطة $(2\,,2)$.

الحـــل: لإيجاد قيمة الوسيط t الموافقة $y=2$ نكتب:

$$\frac{3}{2t^2}+\frac{1}{2t}=2\Rightarrow 3+t=4t^2\Rightarrow 4t^2-t-3=0\Rightarrow$$

$$t_1=1\quad,\quad t_2=-\tfrac{3}{4}$$

ومن الملاحظ أن $x=2$ من أجل واحدة من هاتين القيمتين فقط وهـــي $t_1=1$، فقيمة الوسيط المطلوب هي $t=1$. لإيجاد ميل المماس عندما $t=1$ نبحث عـــن قيمتي x' ، y' عندما $t=1$ فنجد:

$$x'=\frac{t^3-3t^2(t+1)}{t^6}\Rightarrow x'(1)=\frac{1-6}{1}=-5$$

$$y'=-\frac{3}{t^3}-\frac{1}{2t^2}\Rightarrow y'(1)=-3-\tfrac{1}{2}=-\tfrac{7}{2}$$

بالتالي فإن ميل المماس هو:

$$m=\frac{y'(1)}{x'(1)}=\tfrac{7}{10}$$

ومعادلة المماس هي:

$$y-2=\tfrac{7}{10}(x-2)$$

مثال (٤): برهن أن طول تحت المماس للقطع المكافئ:

$\left(x_0,y_0\right)$ عند نقطة $\quad y^2=4ax \quad , \quad a>0$

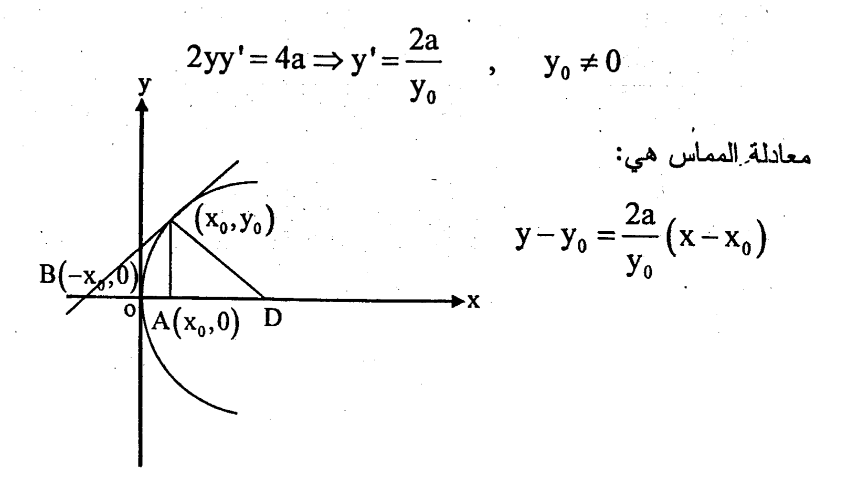
من هذا القطع هو $2x_0$، وطول تحت العمودي هو $2a$.

(طول تحت المماس عند النقطة $\left(x_0,y_0\right)$، هو طول القطعة المستقيمة بين مسقط النقطة $\left(x_0,y_0\right)$ على ox وبين نقطة تقاطع مماس هذا القطع عند النقطة $\left(x_0,y_0\right)$ مع المحور ox.

أما طول تحت العمودي في النقطة $\left(x_0,y_0\right)$، فهو طول القطعة المستقيمة الواصلة بين مسقط النقطة $\left(x_0,y_0\right)$ على ox وبين نقطة تقاطع هذا العمودي (العمود على المماس) عند النقطة $\left(x_0,y_0\right)$ للقطع مع المحور ox.

الحـل: ميل مماس القطع عند النقطة $\left(x_0,y_0\right)$ ينتج من المعادلة:

$$2yy'=4a \Rightarrow y'=\frac{2a}{y_0} \quad , \quad y_0\neq 0$$



معادلة المماس هي:

$$y-y_0=\frac{2a}{y_0}\left(x-x_0\right)$$

المماس يقطع المحور ox عند النقطة B الموافقة لـ $y = 0$. من معادلة المماس ينتج:

$$0 - y_0 = \frac{2a}{y_0}(x - x_0) \Rightarrow -y_0^2 = 2ax - 2ax_0$$

لكن $y_0^2 = 4ax_0$ لأن النقطة (x_0, y_0) تحقق معادلة القطع، إذن:

$$-4ax_0 = 2ax - 2ax_0 \Rightarrow x = -x_0$$

فنقطة تقاطع المماس مع ox هي $B(-x_0, 0)$، ومسقط النقطة (x_0, y_0) على المحور ox هو $A(x_0, 0)$ فطول القطعة $[A, B]$ هو $|AB| = 2x_0$.

لإيجاد طول تحت العمودي، نكتب معادلة العمودي عند النقطة (x_0, y_0). إن ميل المماس عند هذه النقطة هو $y' = \frac{2a}{y_0}$ وميل العمودي $-\frac{y_0}{2a}$، فمعادلة العمودي هي:

$$y - y_0 = \frac{y_0}{2a}(x - x_0)$$

والعمودي يقطع المحور ox عند النقطة D الموافقة لـ $y = 0$، من معادلة العمودي نجد:

$$0 - y_0 = \frac{y_0}{2a}(x - x_0) \Rightarrow 2a = x - x_0 \Rightarrow x = 2a + x_0$$

فنقطة تقاطع العمودي مع ox هي $D(2a + x_0, 0)$ بالتالي فإن طول القطعة $[A, D]$ هو:

$$|AD| = 2a$$

مثال (٥): احسب طول نصف قطر وارتفاع أسطوانة دورانية قائمة مغلقة إذا كان حجمها ثابتًا ومساحتها الكلية نهاية صغرى.

الحل: نفرض أن طول نصف قطر قاعدة الاسطوانة x وحدة، وطول ارتفاعها y وحدة و c حجمها نعلم أن:

$$(x > 0, y > 0) \qquad \pi x^2 y = c \Rightarrow y = \frac{c}{\pi x^2}$$

المساحة الجانبية للاسطوانة يساوي $2\pi\, xy$ وحدة مساحة، ومساحة القاعدتين $2\pi\, x^2$، وبالتالي فإن المساحة الكلية تساوي:

$$S = 2\pi\, x^2 + 2\pi\, xy$$

$$= 2\pi\, x^2 + 2\pi\, x\left(\frac{c}{\pi\, x^2}\right)$$

$$S = 2\pi\, x^2 + \frac{2c}{x}$$

لإيجاد النهاية الصغرى للمساحة نكتب:

$$\frac{dS}{dx} = 4\pi x - \frac{2c}{x^2} = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{c}{2\pi} \Rightarrow x = \left(\frac{c}{2\pi}\right)^{1/3}$$

$$y = \frac{c}{\pi\, x^2} = \frac{c 2^{2/3} \pi^{2/3}}{\pi c^{2/3}} = 2^{2/3} \frac{c^{1/3}}{\pi^{1/3}} = \sqrt[3]{\frac{4c}{\pi}}$$

الملاحظ أن النهاية صغرى لأن:

$$\frac{d^2S}{dx^2} = 4\pi + \frac{4c}{x^3} > 0$$

وقيمة الدالة S تساوي:

$$S=\frac{2\pi x^3+2c}{x}=\frac{c+2c}{\left(\frac{c}{2\pi}\right)^{1/3}}=\frac{3c}{c^{1/3}}(2\pi)^{1/3}=3c^{2/3}(2\pi)^{1/3}$$

نقارن هذه القيمة مع نهايتي الدالة عندما $x\to 0$ و $x\to\infty$ نجد على التوالي $S\to\infty$ و $S\to\infty$، أي أن S تكون نهاية صغرى عند $x=\left(\frac{c}{2\pi}\right)^{1/3}$ وذلك لأن للمشتقة جذرًا واحدًا على مجموعة التعريف.

مثال (٦): شكل من خيط ثابت الطول، طوله L cm، مستطيلاً مساحته أكبر ما يمكن.

الحل: نفرض أن أحد بعدي المستطيل x cm فيكون البعد الآخر هو $\frac{L-2x}{2}$ cm، ومساحة المستطيل هي:

$$S=\frac{x(L-2x)}{2}=\frac{Lx-2x^2}{2}$$

لنفتش عن النهاية العظمى للدالة S:

$$\frac{dS}{dx}=\frac{L-4x}{2}=0\Rightarrow x=\frac{L}{4}$$

من الملاحظ أن هذه النهاية عظمى لأن:

$$\frac{d^2S}{dx^2}=-2<0$$

البعد الآخر $\frac{L}{4} = \frac{L-2\left(\frac{L}{4}\right)}{2}$ فالشكل مربع.

الشروط الحدية: إن المتغير x معرف ضمن الشرط $0 \le x \le \frac{L}{2}$ فلو حسبنا قيمتي الدالة عندما $x = 0$ و $x = \frac{L}{2}$ لوجدنا على الترتيب $S(0) = 0$ ، $S\left(\frac{L}{2}\right) = 0$ مما يدل على أن النهاية العظمى وهي $S = \frac{L^2}{16}$، هي فعلاً المساحة الأعظمية للمستطيل.

مثال (٧): يراد صنع مستودع بشكل متوازي مستطيلات من الألمنيوم ليس له غطاء وقاعدته على شكل مربع. ما هي أبعاد هذا المستودع لتكون مساحة الألمنيوم أصغر ما يمكن علمًا أن سعة المستودع ثابتة وتساوي c وحدة حجم.

الحل: نفرض أن طول ضلع المربع x وحدة طول وطول ارتفاع المستودع y وحدة طول. حجم المستودع هو:

$$x^2y = c \Rightarrow y = \frac{c}{x^2} \quad , \quad x > 0$$

ومساحة الألمنيوم المستخدم:

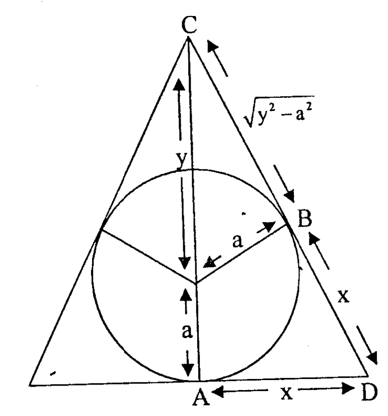
$$S = 4xy + x^2$$

$$= 4x\left(\frac{c}{x^2}\right) + x^2$$

$$= \frac{4c}{x} + x^2$$

والحل يشبه تمامًا ما ورد في المثال (٥).

مثال (٨): حدد نصف قطر قاعدة مخروط دوراني قائم وارتفاعه، بحيث يمس كرة نصف قطرها ثابت كما هو ظاهر في الشكل المرافق، إذا كان حجمه نهاية صغرى.



الحل: نفرض أن نصف قطر قاعدة المخروط يساوي x cm والبعد بين رأس المخروط ومركز الكرة y cm من الملاحظ أن طول القطعة $[A,D]$ يساوي x cm، وأن طول القطعة $[A,B]$ يساوي $\sqrt{y^2-a^2}$.

بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث القائم DAC نجد:

$$x^2+(a+y)^2=\left(x+\sqrt{y^2-a^2}\right)^2$$

$$x^2+a^2+2ay+y^2=x^2+y^2-a^2+2x\sqrt{y^2-a^2}$$

$$a(a+y)=x\sqrt{y^2-a^2}=x\sqrt{y-a}\,\sqrt{y+a}\Rightarrow$$

$$a\sqrt{a+y}=x\sqrt{y-a}\Rightarrow$$

$$x=a\sqrt{\frac{y+a}{y-a}}$$

حجم المخروط = ثلث مساحة القاعدة × الارتفاع أو:

$$V=\tfrac{1}{3}\pi x^2(a+y)$$

$$= \frac{1}{3}\pi a^2 \frac{(a+y)^2}{y-a}$$

لدينا كما هو واضح الشرط $y > a$ (الوتر في المثلث القائم أكبر من الضلع القائم)

لإيجاد النهاية الصغرى يلزم أن يتحقق:

$$\frac{dV}{dy} = \frac{1}{3}\pi a^2 \frac{\left[2(y+a)(y-a)-(y+a)^2\right]}{(y-a)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$2(y+a)(y-a) = (y+a)^2 \Rightarrow$$

$$2(y-a) = y+a \Rightarrow y = 3a$$

أي أن طول الارتفاع يساوي $4a$ ونصف قطر القاعدة:

$$x = a\sqrt{\frac{y+a}{y-a}} = a\sqrt{\frac{4a}{2a}} = a\sqrt{2}$$

والحجم يساوي:

$$V = \frac{1}{3}\pi \frac{a^2(a+3a)^2}{3a-a} = \frac{1}{3}\pi a^2 \frac{(16a^2)}{2a} = \frac{8}{3}\pi a^3$$

ويمكن أن نبرهن كما في الأمثلة السابقة أن هذه النهاية تمثل القيمـــة الصـــغرى لدالة الحجم.

مثال (٩): احسب بعدي المستطيل المرسوم داخل القطع الناقص الذي معادلته:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

إذ كانت أضلاعه توازي محوري القطع ومساحته أكبر ما يمكن.

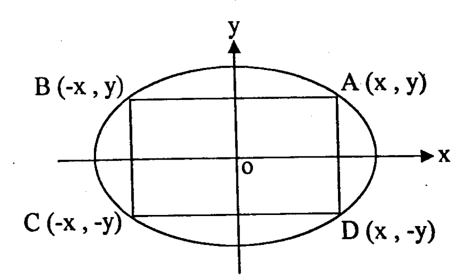
الحــل: ليكن ABCD هذا المستطيل ولنفرض أن إحداثي النقطة A الواقعة في الربع الأول وعلى محيط القطع (x , y) فتكون إحداثي بقية النقاط بسبب التناظر B (-x , y) والواقعة في الربع الثاني C (-x , -y) , D (x , -y) والواقعتان في الربع الثالث والرابع.

مساحة المستطيل:

$$S=(2x)(2y)=4xy, a\geq x\geq 0\wedge b\geq y\geq 0$$

لكن $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ وبالتالي $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$.

لأن $b\geq y\geq 0$ فمساحة المستطيل هي:



$$S=\frac{4bx}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

شرط النهاية هو:

$$\frac{dS}{dx}=\frac{4b}{a}\left(\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)=0\Rightarrow$$

$$\frac{4b}{a}\frac{a^2-x^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}=0\Rightarrow 2x^2=a^2\Rightarrow x=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

لأن $x > 0$ كما فرضنا. ومنه:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}} \Rightarrow S = 4xy = 2ab$$

الشروط الحدية:

نعلم $a \geq x \geq 0$، إذن قيمة دالة المساحة عندما $x = a , x = 0$ هـي علـى التوالي $S = 0 , S = 0$ مما يؤكد أن المساحة أكبر ما يمكن عندما $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

مثال (١٠): من نقطة $(a \ , \ b)$ واقعة في ربع المستوى الأول، أنشئ مسـتقيمًا، يصنع مع محوري الإحداثيات مثلثًا مساحته أصغر ما يمكن.

الحـل: لنفرض أن هذا المستقيم يقطع من المحور ox ابتداء من النقطة o جزءًا طـولهَ L cm ويقطع على المحور oy ابتدءًا من النقطة o جزءًا طوله m cm.

تكتب معادلة المستقيم بدلالة الجزئين المقطوعين على الشكل:

$$\frac{x}{L} + \frac{y}{m} = 1 \qquad m > 0 \ , \ L > 0$$

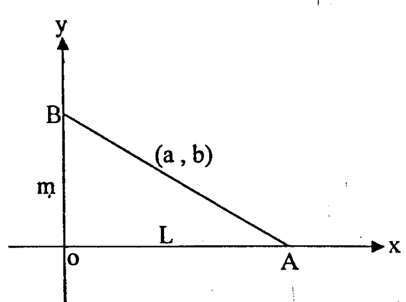
لكن النقطة (a , b) تحقق معادلة المستقيم لذا فإن:

$$\frac{a}{L} + \frac{b}{m} = 1 \Rightarrow \frac{a}{L} = 1 - \frac{b}{m} = \frac{m-b}{m} \Rightarrow L = \frac{am}{m-b}$$

مساحة المثلث هي:

$$S = \frac{1}{2}Lm = \frac{1}{2}\frac{am^2}{m-b}$$





شرط النهاية هو أن يتحقق:

$$\frac{dS}{dm} = \frac{1}{2}a\frac{2m(m-b)-m^2}{(m-b)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$= \frac{1}{2}a\frac{m^2-2mb}{(m-b)^2} = 0 \Rightarrow m^2-2mb = 0 \Rightarrow m = 0 , m = 2b$$

وبأخذ $m = 2b$ لأن $m > 0$ نجد أن:

$$S = \frac{1}{2}\frac{a(4b^2)}{(2b-b)} = 2ab$$

الشروط الحدية:

فرضنا أن النقطة (a , b) تقع على القطعة $[A,B]$ من المستقيم المرسوم والتي يقع طرفاها على محوري الإحداثيات وأن هذه النقطة لا تقع عند طرفي القطعة أي أنها تحقق الشرط $a < L , b < m$، المتغير الذي اخترناه m يحقق الشرط $b < m$، لذا نحسب نهايتي مساحة المثلث عندما $m \to b^+$ ، $m \to \infty$. نجد $S \to \infty$ ، $S \to \infty$ مما يؤكد أن المثلث مساحته أصغر ما يمكن عندما $m = 2b$.

تمارين

١- قسم العدد 120 إلى عددين بحيث يكون حاصل الضرب P لأحدهما بمربع الآخر أكبر ما يمكن.

٢- وعاء اسطواني قاعدته دائرية الشكل وحجمه $1000 \ cm^3$. أوجد أبعاده بحيث تكون كمية المعدن اللازمة لصنعه (أي مساحته السطحية) اصغر ما يمكن وذلك في الحالتين:

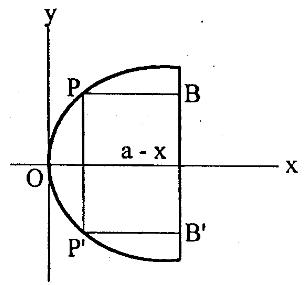
أ- الوعاء مفتوح من قاعدته العليا.

ب- الوعاء مغلق.

٣- يراد عمل سياج حول حقل مستطيل الشكل ذي مساحة مفروضة. فإذا كان هناك نهر على احد جوانب الحقل (طول المستطيل) ولا نحتاج إلى إقامة سياج على هذا الجانب فبرهن أنه إذا كان طول الحقل يساوي ضعفي عرضه فالتكلفة اللازمة تكون أقل ما يمكن.

٤- ما هي أبعاد مخروط دائري قائم ذي حجم أقل ما يمكن تستطيع رسمه حول كرة نصف قطرها 20 cm.

٥- أوجد بعدي المستطيل ذي المساحة العظمى والذي يمكن رسمه داخل قطعة القطع المكافئ $y^2 = 4px$ المحددة بالمستقيم $x = a$.



٦- عددين موجبين مجموعهما 20 أو جد العددين:

أ- إذا كان حاصل ضربهما أكبر ما يمكن.

ب- إذا كان مجموع مربعيهما أصغر ما يمكن.

ج- إذا كان حاصل ضرب مربع أحدهما بمكعب الآخر أكبر ما يمكن.

٧- عددين موجبين حاصل ضربهما 16 أوجد العددين:

أ- إذا كان مجموعهما أصغر ما يمكن.

ب- إذا كان ناتج جمع أحدهما إلى مربع الآخر أصغر ما يمكن.

٨- يراد صنع صندوق مفتوح على شكل متوازي مستطيلات قاعدتاه على شكل مربع وحجمه $216 \ m^3$. فإذا كانت تكلفة المتر المربع من القاعدة 50 سنتًا ومن الجوانب 25 سنتًا. فما هي أبعاد الصندوق التي تضمن لنا أقل تكلفة ممكنة.

٩- مستطيل مرسوم داخل القطع الناقص $x^2/400 + y^2/225 = 1$ بأضلاع موازية لمحاور القطع أوجد بعدي المستطيل بحيث تكون.

أ- مساحته أكبر ما يمكن.

ب- طول محيطه اكبر ما يمكن.

١٠- المطلوب رسم اسطوانة دائرية قائمة داخل مخروط دائري قائم نصف قطره r أوجد نصف قطر الاسطوانة R بحيث يكون:

أ- إذا كان حجمها أكبر ما يمكن.

ب- إذا كانت مساحتها الجانبية أكبر ما يمكن.

الفصل الخامس

الانحناء (التقوس)

اشتقاق طول القوس:

لتكن $y = f(x)$ دالة مشتقتها الأولى مستمرة. ولتكن A نقطة ثابتة على المنحنى، ولنرمز بـ s لطول القوس المقاس من A إلى أي نقطة أخرى على المنحنى. لتكن $P(x, y)$ نقطة اختيارية و $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ نقطة مجاورة على المنحنى. لنرمز بـ Δs لطول القوس P إلى Q.

إن معدل تغير القوس $s\ (= AP)$ بمقدار الوحدة لكل تغير في x ومعدل هذا القوس لكل وحدة تغير في y هما على الترتيب:

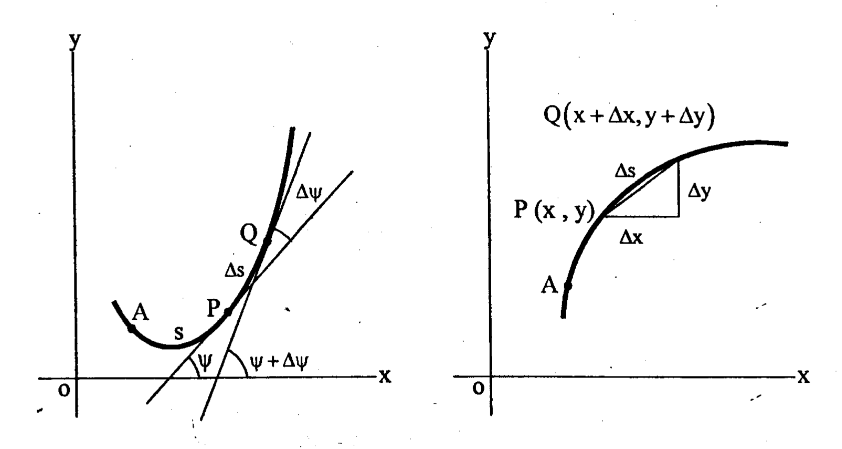
$$\frac{ds}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \pm\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$\frac{ds}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta y} = \pm\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dy}\right)^2}$$

على أن تؤخذ الإشارة الموجبة أو الإشارة السالبة في العلاقة الأولى حسبما تزداد s أو تتناقص عندما تزداد x وفي العلاقة الثانية تزداد s أو تتناقص عندما تزداد y. وعندما يعطى المنحنى بالمعادلتين البارامتريتين $x = f(u)\ ,\ y = g(u)$ فإن معدل تغير s بالنسبة لـ u يعطى بـ:

$$\frac{ds}{du} = \pm\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2}$$

وهنا تؤخذ الإشارة الموجبة أو السالبة حسبما تزداد s أو تتناقص عندما تزداد u وكي نتحاشى تكرار الإشارات الغامضة سنفرض فيما يأتي أن الاتجاه على كـل منحنى قد اختير بحيث تكون مشتقة طول القوس موجبة.



الانحناء (التقوس):

إن الانحناء K للمنحنى، $y = f(x)$ عند أي نقطة P منه هو معـدل تغيـر الاتجاه (أي زاوية الميل τ لمماس المنحنى عند P) لكل وحدة طول للقوس s.

$$K = \frac{d\psi}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\psi}{\Delta s} = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}$$

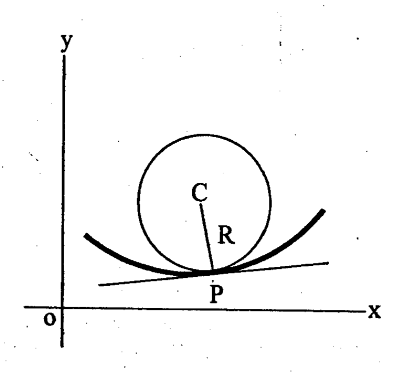
$$K = \frac{-\dfrac{d^2x}{dy^2}}{\left\{1 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2\right\}^{3/2}}$$

يتضح من العلاقة الأولى أن K موجب عندما تكون P على قوس مقعر لأعلى وسالب عندما يكون P على قوس مقعر لأسفل.

سيجد القارئ أن K قد يعرف أحيانًا بحيث يكون موجبًا، أي يعرف على انه القيمة العددية للقيمة المعطاة في العلاقة السابقة. وينبغي إذا أخذنا بهذا التعريف أن نتجاهل إشارة K في الأجوبة التي نحصل عليها أدناه.

نصف قطر الانحناء R: عند نقطة P من المنحنى يعطى بـ $R = |1/K|$ بفرض أن $K \neq 0$.

دائرة الانحناء: أو الدائرة الملاصقة لمنحنى عند نقطة P منه هي الدائرة التي نصف قطرها R والواقعة في جهة تقعر المنحنى والمماسة له عند P.



لرسم دائرة الانحناء: ابدأ بإقامة العمودي على المنحنى عند النقطة P نحو جهة تقعره ثم خذ عليه $PC = R$. فتكون النقطة C مركز الدائرة المطلوبة.

مركز الانحناء: عند النقطة $P(x, y)$ من المنحنى هي المركز C لدائرة الانحناء عند P. ويعطي الإحداثيات (α,β) لمركز الانحناء بـ:

$$\alpha = x - \frac{\frac{dy}{dx}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad , \quad \beta = y + \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

أو

$$\alpha = x + \frac{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}{\frac{d^2x}{dy^2}} \quad , \quad \beta = y - \frac{\frac{dx}{dy}\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]}{\frac{d^2x}{dy^2}}$$

منشئ المنحنى: هو المحل الهندسي لمراكز الانحناء للمنحنى المفروض.

أمثـلة محـلولة

١- أثبت أن:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

الحـل: لنرمز على المنحنى $y = f(x)$ حيث $f(x)$ مشتقة مسمرة بـ s لطول القوس اعتبارًا من نقطة ثابتة A على نقطة متغيرة $P(x, y)$، ولنرمز لـ Δs لطول القوس اعتبارًا من النقطة P إلى نقطة مجـاورة $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ على المنحنى وبـ PQ لطول الوتر الذي يصل P بـ Q.

بما أن $\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\Delta s}{PQ} \cdot \frac{PQ}{\Delta x}$ وبما أن $(PQ)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ فإن:

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\Delta s}{PQ}\right)^2 \left(\frac{PQ}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\Delta s}{PQ}\right)^2 \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}$$

$$=\left(\frac{\Delta s}{PQ}\right)^2\left\{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right\}$$

وعنـــدما تقتـــرب Q مـــن P علـــى المنحنـــى $\Delta y \to 0$ ، $\Delta x \to 0$ و

$\frac{\Delta s}{PQ}=\frac{PQ\ \text{القـــوس}}{PQ\ \text{الوتـــــر}} \to 1$ وبالتالي:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right\}=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

٢- أوجد $\frac{ds}{dx}$ عند النقطة $P\,(x\,,y)$ على القطع المكافئ $y=3x^2$.

الحـــل:

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{1+(6x)}=\sqrt{1+36x^2}$$

٣- أوجـــد $\frac{ds}{dx}$ و $\frac{ds}{dy}$ عنـــد النقطـــة $P\ (x\ ,\ y)$ علـــى القطـــع النـــاقص $x^2+4y^2=8$.

الحـــل:

i-

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{4y}$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\frac{x^2}{16y^2}=\frac{x^2+16y^2}{16y^2}=\frac{32-3x^2}{32-4x^2}$$

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{\frac{32-3x^2}{32-4x^2}}$$

ii-
$$\frac{dx}{dy}=-\frac{4y}{x}$$

$$1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=1+\frac{16y^2}{x^2}=\frac{x^2+16y^2}{x^2}=\frac{2+3y^2}{2-y^2}$$

$$\frac{ds}{dy}=\sqrt{\frac{2+3y^2}{2-y^2}}$$

٤- أوجد $\frac{ds}{d\theta}$ عند النقطة $P(\theta)$ على المنحنى $x=\sec\theta\ ,\ y=\tan\theta$.

الحــل:

$$\frac{ds}{d\theta}=\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}=\sqrt{\sec^2\theta\tan^2\theta+\sec^4\theta}$$

$$=|\sec\theta|\sqrt{\tan^2\theta+\sec^3\theta}$$

٥- أوجد انحناء القطع المكافئ $y^2=12x$ عند النقطة:

أ- $(3\ ,\ 6)$ ب- $(\frac{3}{4},-3)$ ج- $(0\ ,\ 0)$.

الحــل:

أ- عند $(3\ ,\ 6)$: يكون :

$$k=\frac{y''}{\left[1+y'^2\right]^{3/2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=1 \qquad\qquad 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{6} \quad , \quad K = \frac{-1/6}{2^{3/2}} = -\frac{\sqrt{2}}{24}$$

ب- عند $(3/4, -3)$ يكون:

$$\frac{dy}{dx} = -2 \quad , \quad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 5$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{3} \quad , \quad K = \frac{4/3}{5^{3/2}} = -\frac{4\sqrt{5}}{75}$$

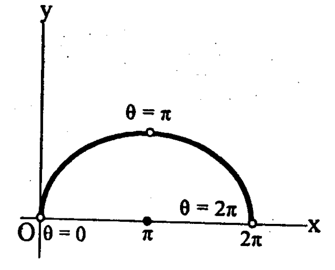
ج- عند $(0 , 0)$ يكون $\frac{dy}{dx}$ غير معرف ولكن:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{6} = 0 \quad , \quad 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 1$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{1}{6} \quad , \quad K = -\frac{1}{6}$$

٧- أوجد انحناء الدويري (السيكلوئيد) $y = 1 - \cos\theta$ ، $x = \theta - \sin\theta$

أعلى نقطة للقوس.



الحــل: للحصول على أعلى نقطة على الفتــرة $0 < x < 2\pi$ نلاحــظ أن $dy/d\theta = \sin\theta$ والقيمة الحرجة على الفترة المذكورة هي $x = \pi$ وبــما أن $d^2y/d\theta^2 = \cos\theta < 0$ عندما $\theta = \pi$ فالنقطة $\theta = \pi$ هي نقطة عظمى نسبية وهي أعلى نقطة من المنحنى على الفترة المذكورة.

للحصول على الانحناء:

$$\frac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta \qquad \frac{dy}{d\theta}=\sin\theta$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)\cdot\frac{d\theta}{dx}=\frac{-1}{(1-\cos\theta)^2}$$

وعند $\theta=\pi$ يكون:

$$dy/dx=0 \qquad d^2y/dx^2=-1/4$$

$$K=-1/4$$

تمارين

١- أوجد انحناء المنحنى المستوى السهمي (السيسوئد) $y^2(2-x)=x^3$ عند النقطة $(1 , 1)$.

٢- أوجد نقطة أقصى انحناء على المنحنى $y = \ln x$.

٣- عين موضع مركز الانحناء C للمنحنى $y = f(x)$ عند إحدى نقاطه $P(x , y)$ التي يكون عندها $y^2 \neq 0$.

٤- أوجد معادلة دائرة الانحناء للمنحنى $2xy + x + y = 4$ عند النقطة $(1 , 1)$.

٥- أوجد معادلة منشئ (المحل الهندسي لمركز الانحناء) القطع المكافئ $y^2 = 12x$.

٦- أوجد معادلة منشئ المنحنى $x = \cos\theta + \theta\sin\theta , y = \sin\theta - \theta\cos\theta$.

الفصل السادس

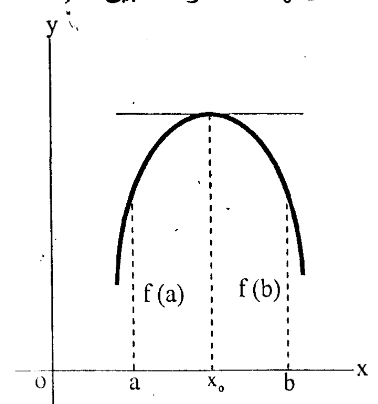
قانون القيمة المتوسطة

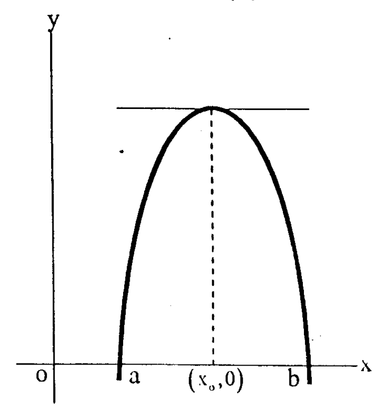
نظرية رول:

إذا كانت $f(x)$ متصلة في الفترة $a \le x \le b$ وكان $f(a) = f(b) = 0$ وإذا كان $f'(x)$ موجودة عند موضع في الفترة باستثناء نقطتي نهايات الفتـرة علـى الأكثر، فإن $f'(x) = 0$ لقيمة واحدة على الأقل لـ x، $x = x_0$، واقعة بين a و b.

وهذا يعني من الناحية الهندسية أنـه إذا قطع منحنى متصل المحور x عـند $x = a$ و $x = b$ وكان له مماس عند كل نقطة من نقطة التي تقع بين a , b فإنه يوجد على الأقل نقطة واحدة $x = x_0$ بين a , b يكون المماس عنـدها موازيًـا للمحور.

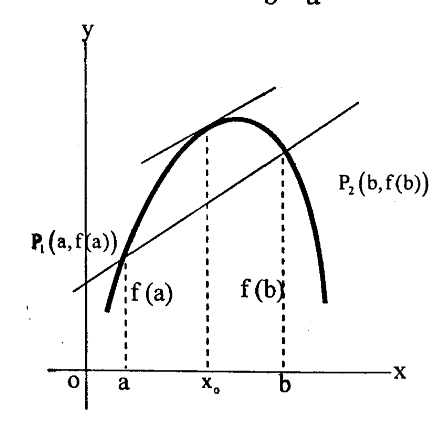
نتيجة: إذا حققت الدالة $f(x)$ شروط نظرية رول، خلاف أن $f(a) = f(b) \neq 0$ فعندئذ $f'(x) = 0$ لقيمة واحدة على الأقل لـ x مثل $x = x_0$، واقعة بين a , b.





قانون القيمة المتوسطة: إذا كـــانت $f(x)$ متصلة في الفترة $a \le x \le b$ وكانت $f'(x)$ موجودة عند كل موضع في هذه الفترة باستثناء نقطتي نهايات الفترة على الأكثر، فعندئذ يوجد على الأقل واحدة لــ x بين a , b مثل $x = x_o$ بحيث:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_o)$$



وهذا يعني من الناحية الهندسية أنه إذا كانت P_1 , P_2 نقطتين علـــى منحنـــى متصل، له مماس عند كل نقطة بينهما، فعندئذ يوجد على الأقل نقطـــة واحـــدة على المنحنى بين P_1 , P_2 يكون ميـــل المنحنى عندها مساويًا ميل P_1P_2.

يمكن صياغة قانون القيمة المتوسطة بأشكال مفيدة متعددة.

١- $f(b) = f(a) + (b-a).f'(x_o)$ حيث x_o واقعة a , b وبتغيير بسيط في الرموز تأخذ هذه الصيغة.

٢- $f(x) = f(a) + (x-a).f'(x_o)$ حيث x_o واقعة بين a , x ويتضـــح أن $x_o = a + \theta(b-a)$ حيث $0 < \theta < 1$.

٣- $0 < \theta < 1$، $f(b) = f(a) + (b-a).f'[a + \theta(b-a)]$ وإذا كتبنـــا $h = (b-a)$ فإن ٣- تصبح:

٤- $0 < \theta < 1$، $f(a-h) = f(a) + h\ f'(a+\theta h)$ وأخيرًا إذا وضعنا $a = x$ و $h = \Delta x$ فإن ٤- تصبح:

٥- $0 < \theta < 1$، $f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x\, f'(x+\theta.\Delta x)$.

القانون العام للقيمة المتوسطة: إذا كانت الدالتان $f(x)$, $g(x)$ متصلتين في الفترة $a \le x \le b$، وإذا وجد $f'(x)$, $g'(x)$ وكان $g'(x) \neq 0$ عند كل موضع من هذه الفترة باستثناء نقطتي نهايتيها على الأكثر. فعندئذ توجد بين a , b قيمة واحدة لـ x على الأقل مثل $x = x_o$ بحيث يكون:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_o)}{g'(x_o)}$$

وعندما $g(x) = x$ تصبح هذه المعادلة قانون القيمة المتوسطة.

قانون القيمة المتوسطة الموسع: إذا كان كلا من $f(x)$ وجميع مشتقاتها حتى $(n-1)$ متصلة في الفترة $a \le x \le b$ وإذا كانت $f^{(n)}(x)$ موجودة عند كل موضع في الفترة باستثناء نقطتي نهايتها على الأكثر، فعندئذ توجد قيمة واحدة على الأقل لـ x، مثل $x = x_o$، واقعة بين a , b بحيث:

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots$$
$$+ \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(b-a)^n \qquad (6)$$

وإذا وضعنا x بدلاً من b فإن (٦) تأخذ الشكل:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots$$

$$+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x-a)^n \qquad (7)$$

حيث x_o واقع بين x , a. وإذا وضعنا 0 بدلاً من a في (7) تصبح:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots$$

$$+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}x^n \qquad (8)$$

حيث x_o واقعة بين $x , 0$.

مسائل محلولة

١- أوجد قيمة x_o الواردة في نظرية رول للدالة $f(x)=x^3-12x$ في الفترة $0\le x\le 2\sqrt{3}$.

الحـل:

$f'(x)=3x^2-12=0$ وعندما $x=\pm 2$ فإن $x_o=2$

٢- هل يمكن تطبيق نظرية رول على الدالتين:

أ- $f(x)=\dfrac{x^2-4x}{x-2}$ ب- $f(x)=\dfrac{x^2-4x}{x+2}$

الحــل:

أ- أن $f(x) = 0$ عندما $x = 0.4$ وبما أن $f(x)$ دالة منقطعة عند $x = 2$ وهي نقطة من نقط الفترة $0 \le x \le 4$ فإن النظرية لا تطبق.

ب- $f(x) = 0$ عندما $x = 0.4$ ولكن $f(x)$ دالة منقطعة عنـد $x = -2$ وهــي نقطـــة ليســـت مـــن نقـــط الفتـــرة $0 \le x \le 4$ ثـــم أن $f'(x) = (x^2 + 4x - 8)/(x + 2)^2$ موجــودة في كل موضع بــاستثناء عنــد $x = -2$. لذلك فالنظرية قابلة للتطبيق حيث نجد $x_0 = 2(\sqrt{3} - 1)$، وهي الجذر الموجب لـ $x^2 + 4x - 8 = 0$.

٣- برهن نظرية رول: إذا كانت $f(x)$ دالة متصــلة فــي الفتــرة $a \le x \le b$ وكانت $f(a) = f(b) = 0$ وكانت $f'(x)$ موجودة عند كل موضع فــي الفتــرة باستثناء نقطتي نهايتيها على الأكثر فإن $f'(x) = 0$ لقيمة واحدة على الأقل لــ x مثل $x = x_0$ واقعة بين a , b.

الحــل: إذا كانت $f(x) = 0$ على طول الفترة فــإن $f'(x) = 0$ كــذلك ويــتم برهان النظرية. أما إذا كانت $f(x)$ موجبة (سالبة) في موضع ما فــي الفتــرة فعندئذ يكون لها قيمة عظمى (صغرى) نسبية عند موضع ما مثل $x = x_0$ فــي الفترة $a < x_0 < b$ وبالتالي فإن $f'(x_0) = 0$.

٤- برهن قانون القيمة المتوسطة: إذا كانت $f(x)$ متصلة في الفترة $a \le x \le b$ وإذا كانت $f'(x)$ موجودة عند كل موضع في الفترة باستثناء نقطتي نهايتيها على الأكثر فعندئذ يوجد على الأقل قيمة واحدة لــ x بين a , b مثل $x = xo$ بحيث:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_o)$$

نلاحظ أن معادلة المستقيم القاطع P_1P_2 هـي $y=f(b)+K(x-b)$ حيـث $K=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ والمسافة الرأسية من المستقيم القاطع إلى المنحنى عنـد أي نقطة x في الفـترة $a<x<b$ هي $F(x)=f(x)-f(b).K(x-b)$ إن F (x) الآن تحقق شروط نظرية رول وبالتالي فـإن $F'(x)=f'(x)-K=0$ عند $x=x_o$ بين b , a وهكذا $K=f'(x_o)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.وهو المطلوب.

٥- برهن القانون العام للقيمة المتوسـطة: إذا كانـت الـدالتان f (x) , g (x) متصلتين في الفترة $a\le x\le b$ وإذا وجد f' (x) , g' (x) وكانـت $g'(x)\neq 0$ عند كلِ موضع في الفترة باستثناء نهايتيها على الأكثر، فعندئذ توجد بـين b , a قيمة واحدة لـ x على الأقل مثل $x=x_o$ بحيث يكون:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_o)}{g'(x_o)}$$

لنفرض g (a) = g (b) فعندئذ يتضح من نتيجة نظرية رول أن g' (x) = 0 عند قيمة لـ x بين a , b وهذا مخالف للفرض إذن $g(b)\neq g(a)$. لنفـرض الآن $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=K$ حيث K ثابت، ونكتب الدالة:

$$F(x)=f(x)-f(b)-K\left[g(x)-g(b)\right]$$

تحقق هذه الدالة شروط نظرية رول وبالتـالي $F'(x)=f'(x)-K\,g'(x)=0$ عند قيمة وحدة لـ x على الأقل، لتكن $x=x_o$ بين b , a إذن:

$$K = \frac{f'(x_o)}{g'(x_o)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

نظرية لوبيتال:

نفرض أن الدالتين $f(x)$, $g(x)$ تحققان نظرية كوشي في فترة ما وأنهما تنعدمانَ عند النقطة $x = a$ أي أن $f(a) = g(a) = 0$ فإذا تواجدت نهاية النسبة $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ عندما $x \to a$، فإن النهاية $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ تتواجد أيضًا ويكون:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

الإثبات:

في الفترة $[a , b]$ نأخذ نقطة ما $x \neq a$ ونطبق نظرية كوشي فينتج أن:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

حيث ξ تقع بين x , a ولكن حسب الفرض $f(a) = g(a) = 0$ لذلك:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

فإذا كانت $x \to a$ تؤول $\xi \to a$ أيضًا نظرًا لوقوع ξ بين a , x.

وإذا كان:

$$\lim_{\xi \to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = A$$

فإنه يكون أيضًا:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

ومن هذا يتضح أن:ذ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$

وبالتالي:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=$$

ملاحظات:

١- إذا كانت $f'(a)=g'(a)$ والمشتقتان $f'(x)$, $g'(x)$ تحققان الشروط التـــي تفرضها النظرية على الدالتين $f(x)$, $g(x)$ فإنه يمكن إعادة تطبيـــق النظريـــة على النسبة $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ فتعطى:

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

٢- تطبق قاعدة لوبيتال أيضًا في حالة ما إذا كانت $x\to\infty$ أو $x\to-\infty$ بدلاً من $x\to a$ أي أن:

$$\lim_{x\to a}f(x)=0 \qquad \text{and} \qquad \lim_{x\to a}g(x)=0$$

ويمكن إثبات هذه النتيجة.

٣- يمكن إثبات النظرية في حالة ما إذا كانت الدالتين $f(x)$, $g(x)$ تقتربان من مالا نهاية عندما $x\to a$ (أو $x\to\infty$) وفي هذه الحالة يمكننا تعيين النهايـــة

$\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ والتي علـى الصـورة غيـر المعينـة $\frac{\infty}{\infty}$ عنـدما $x \to a$ (أو $x \to \infty$).

٤- توجد صور أخرى غير معينة غير $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ مثل $0.\infty$ ، $\infty - \infty$ ، 0^0، ∞^0 ، 1^∞.

ويمكن إيجاد النهاية على الصورة $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ باستخدام قاعدة لوبيتال مباشرة. أما بالنسبة للصور الأخر الغير معينة فيجب تحويلها أولاً إلى الصور $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ قبل تطبيق قاعدة لوبيتال.

أمثـــلة

مثال (١): أوجد قيمة:

1- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x}$　　　2- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{ax^2+b}{cx^2-d}$

الحـل:

1- $$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1} = \infty$$

2- $$\lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+b}{cx^2-d} = \lim_{x\to\infty} \frac{2ax}{2cx} = \frac{a}{c}$$

مثال (٢): أوجد قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan 3x}$.

الحــل.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan 3x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\sin 3x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin 3x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin 3x}{\sin x}\cdot(-1)=\frac{-3}{1}(-1)=3$$

مثال (٣): أوجد قيمة النهاية $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

الحــل:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}}{\cos x}=\frac{2}{1}=2$$

ويلاحظ في هذا المثال أننا طبقنا قاعدة لوبيتال ثلاث مرات.

مثال (٤): أوجد قيمة النهاية $\lim_{x\to\infty}x\left(e^{1/x}-1\right)$.

الحــل:

$$\lim_{x\to\infty}x\left(e^{1/x}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{1/x}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^{2}}\cdot e^{1/x}}{-\frac{1}{x^{2}}}=e^{0}=1$$

يلاحظ في هذا المثال أنه قبل تطبيق قاعدة لوبيتال تم تحويل الصورة الغير معينة من $\infty.0$ إلى $\frac{0}{0}$ حتى يتسنى لنا تطبيق القاعدة.

مثال (د): أوجد قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

الحـــل: هذه النهاية تأخذ الصورة الغير معينة 1^{∞} لذا نتبع الطريقة السابقة كمـــا يلي: نفرض أن:

$$y = x^{\frac{1}{1-x}}$$

$$\therefore \ln y = \frac{1}{1-x}\ln x$$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\ln y = \lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}\ln x \qquad (\infty \times 0)$$

لذا نحولها إلى الصورة $\frac{0}{0}$ ثم نطبق قاعدة لوبيتال:

$$\therefore \lim_{x\to 1}\ln y = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1$$

$$\therefore \lim_{x\to 1} y = \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

متسلسلتا ماكلورين وتايلور:

تعريف: أي متسلسلة على الصورة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

تسمى متسلسلة قوى في x حيث $a_0, a_1, \ldots, a_n$ كلها ثوابت. وإذا كتبنا f (x) على الصورة:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (1)$$

فإنه يقال أن الدالة أمكن تمثيلها بهيئة متسلسلة قوى في x. ويقال أيضًا أن المتسلسلة (1) تمثل مفكوك الدالة f (x) في قوى x حول النقطة x = 0 أو في جوار النقطة x = 0. وإذا أمكن التعبير عن الدالة f (x) على الصورة:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-b) + a_2(x-b)^2 + \ldots + a_n(x-b)^n + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n \qquad (2)$$

فإننا نقول أن الدالة أمكن تمثيلها بهيئة متسلسلة في قوى (x – b) أو حول النقطة x = b (في جوار النقطة x = b).

فترة تقارب المتسلسلة:

تعرف جميع قيم x والتي تتقارب عندها المتسلسلة بفترة تقارب المتسلسلة. ومن الواضح أن المتسلسلة (1) تتقارب عند x = 0، والمتسلسلة (2) تتقارب عند x = b. إذا كانت المتسلسلة (1) أو المتسلسلة (2) تتقاربا لقيم أخرى للمتغير x فإنه إما ان تكون لجميع قيم x أو لجميع قيم x في الفترة المحدودة والتي يمكن أن تكون فترة مفتوحة أو نصف مفتوحة أو مغلقة.

متسلسلة ماكلورين:

نفرض أنه أمكن تمثيل الدالة $f(x)$ على صورة متسلسلة متقاربة في قوى x على الصورة:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

وذلك في فترة معينة للمتغير x وأن $f(x)$ ومشتقاتها من جميع الرتب معرفة ومتصلة في فترة التقارب. وبأخذ مشتقة الطرفين بالنسبة إلى x للمتسلسلة (1) ينتج:

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots$$

$$f''(x)=2a_2+2.3a_3x+\ldots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\ldots$$

$$f'''(x)=2.3a_3+2.3.4a_4x+\ldots+n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}+\ldots$$

وبوضع $x=0$ في العلاقات السابقة ينتج أن:

$$f(0)=a_0 \quad , \quad f'(0)=a_1 \quad , \quad f''(0)=2!a_2$$

$$f'''(0)=3!a_3 \quad , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad , \quad f^{(n)}(0)=n!a_n$$

$$a_0=f(0) \quad , \quad a_1=f'(0) \quad , \quad a_2=\frac{f''(0)}{2!}$$

$$a_3=\frac{f'''(0)}{3!} \quad , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad , \quad a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

وبالتعويض في المتسلسلة (1) ينتج:

$$f(x)=f(0)+x\,f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\ldots$$

$$\therefore f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

وتعرف هذه المتسلسلة بمتسلسلة ماكلورين أو مفكوك ماكلورين ويستخدم في فترة تقارب المتسلسلة.

أمثلة

مثال (١): أوجد مفكوك ماكلورين للدالة $f(x)=e^x$

الحل:

$$\begin{aligned}
f(x)&=e^x & f(0)&=1\\
f'(x)&=e^x & f'(0)&=1\\
f''(x)&=e^x & f''(0)&=1\\
&\cdots & &\cdots\\
f^{(n)}(x)&=e^x & f^{(n)}(0)&=1
\end{aligned}$$

بالتعويض في متسلسلة ماكلورين:

$$f(x)=f(0)+x\,f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\ldots$$

ينتج:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

بالتعويض في هذا المفكوك $-x$ بدلاً من x نستنتج مفكوك e^{-x}:

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$$

ومن تعريف الدوال الزائدية يمكن استنتاج مفكوكا $\cosh x$, $\sinh x$ حيث أن:

$$\cosh x=\frac{1}{2}\left[e^x+e^{-x}\right]=\frac{1}{2}\left[2+2\frac{x^2}{2!}+2\frac{x^4}{4!}+\ldots\right]$$

$$\cosh x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

كذلك:

$$\sinh x=\frac{1}{2}\left[e^x-e^{-x}\right]=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

وكلها مفكوكات شهيرة. ويمكن تحديد فترة هذه المتسلسلات والتي سوف ندرس طرق إيجادها عند دراستنا تفصيلاً لموضوع متسلسلات القوى في السنة المقبلة.

وسنجد أنه هذه المتسلسلات للدوال $\sinh x$, $\cosh x$, e^x كلها متقاربة لجميع قيم x.

مثال (٢): أوجد مفكوك الدالتين:

(i) $\sin x$ (ii) $\cos x$

في قوى x التصاعدية (أو حول النقطة $x = 0$).

الحـــل: هذا يعني أن المطلوب إيجاد مفكوك أو المتسلسلة ماكلورين لكـــل مـــن الدالتين السابقتين وبنفس طريقة المثال السابق نفرض:

$$f(x) = \sin x \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x \qquad f''(0) = 0$$

$$\cdots \quad \cdots \qquad \cdots \quad \cdots$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \qquad f^{(n)}(0) = \sin\frac{n\pi}{2}$$

وبالتعويض في مفكوك ماكلورين ينتج:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

وبإتباع نفس الطريقة السابقة بالنسبة للدالة $f(x) = \cos x$ يمكن الحصول على فكوك الدالة:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

ويمكن إثبات أن المتسلسلتين متقاربتين لجميع قيم x.

مثال (٣): أوجد مفكوك ماكلورين للدالة $f(x) = \ln(1 + x)$.

الحـــل:

$$f(x) = \ln(1+x) \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2} \qquad f''(0)=-1$$

$$f'''(x)=-\frac{2!}{(1+x)^3} \qquad f'''(0)=2!$$

وبوجه عام:

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \qquad f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

وبالتعويض في مفكوك ماكلورين ينتج:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

ملحوظة: يلاحظ أنه لا يمكن إيجاد مفكوك ماكلورين للدالة $\ln x$ حيث أنها غير معرفة عند $x=0$.

مثال (٤): أوجد مفكوك ماكلورين للدالة $(1+x)^m$.

الحـــل:

$$f(x)=(1+x)^m \qquad f(0)=1$$

$$f'(x)=m(1+x)^{m-1} \qquad f'(0)=m$$

$$f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2} \qquad f''(0)=m(m-1)$$

$$f'''(x)=m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3} \qquad f'''(0)=m(m-1)(m-2)$$

… … … … …

$$f^{(n)}(0)=m(m-1)(m-2)....(m-n+1)$$

وبالتعويض في مفكوك ماكلورين ينتج:

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+...+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{n!}x^n+...$$

وهو ما يسمى بمفكوك ذات الحدين حيث m لا يمثل عددًا صحيحًا موجبًا وهـــذا المفكوك متقارب لقيم $|x|<1$.

ملحوظة: ويمكن استخدام تركيبات جبرية لمفكوكات بعض الدوال الشهيرة فـــي إيجاد مفكوك دوال أخرى كالآتي:

مثال (٥): أوجد مفكوك ماكلورين للدالة $e^x \cos x$ حتى حدود الدرجة الخامسة في x.

الحـــل: من معرفة مفكوك ماكلورين للدوال:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+... \quad (1)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+... \quad (2)$$

بضرب (1) , (2) ينتج:

$$e^x\cos x=\left[1+x+\frac{x^2}{2!}+...\right]\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...\right]$$
$$=1+x-\frac{2x^3}{3!}-\frac{2^2x^4}{4!}-\frac{2^2x^5}{5!}+...$$

متسلسلة تايلور:

وفي هذه الحالة يكون مفكوك الدالة f (x) حول النقطة x = b أو في جـوار النقطة x = b.

بفرض مفكوك الدالة على الصورة:

$$f(x)=a_0+a_1(x-b)+a_2(x-b)^2+\ldots+a_n(x-b)^n+\ldots$$

الدالة f (x) ومشتقاتها من جميع الرتب معرفة ومتصلة عند x = b.

بتفاضل طرفي المتطابقة السابقة عدة مرات يمكن الحصول على قيم المعـاملات $a_0,a_1,\ldots,a_n$ كالآتي:

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-b)+3a_3(x-b)^2+\ldots+na_n(x-b)^{n-1}+\ldots$$

$$f''(x)=2a_2+(3.2)a_3(x-b)+\ldots+n(n-1)a_n(x-b)^{n-2}+\ldots$$

$$f'''(x)=(3.2)a_3+(4.3.2)a_4(x-b)+\ldots$$
$$+n(n-1)(n-2)a_n(x-b)^{n-3}+\ldots$$

وبالتعويض في العلاقات السابقة x = b ينتج:

$$f(b)=a_0 \quad , \quad f'(b)=a_1$$

$$f''(b)=2a_2 \quad , \quad f'''(b)=(3.2)a_3$$

وهكذا تكون قيم المعاملات هي:

$$a_0=f(b) \quad , \quad a_1=f'(b) \quad , \quad a_2=\frac{f''(b)}{2!}$$

$$\ldots \quad , \quad a_3 = \frac{f'''(b)}{3!} \quad , \quad a_n = \frac{f^{(n)}(b)}{n!}$$

ويكون مفكوك تايلور للدالة f (x) في قوى (x – b) التصاعدية أو في جوار النقطة x = b على الصورة:

$$f(x) = f(b) + f'(b)(x-b) + \frac{f''(b)}{2!}(x-b)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n + \ldots$$

وهذا المفكوك يكون صحيحًا لجميع قيم x في فترة تقارب المتسلسلة. ويطلق عليه مفكوك تايلور للدالة f (x) حول النقطة x = b.

ويمكن كتابته في صورة أخرى مختصرة:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n$$

وباستبدال (x + b) بدلاً من x في المفكوك السابق نحصل على صورة أخرى لمفكوك تايلور في قوى x التصاعدية وهي:

$$f(x+b) = f(b) + f'(b)x + \frac{f''(b)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(b)}{n!}x^n + \ldots$$

وبالتعويض عن b = 0 في المفكوك الأخير نحصل على مفكوك ماكلورين حيث أن:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

وهذا يعني أن مفكوك ماكلورين حالة خاصة من مفكوك تايلور.

مثال (١): أوجد مفكوك تايلور للدالة $f(x) = \ln x$ حول النقطة $x = 1$.

الحــل: الدالة $f(x) = \ln x$ معرفة ومتصلة هي وجميع مشتقاتها فـــي جـــوار النقطة $x = 1$. وعلى هذا يمكن إيجاد مفكوكها في قوى $(x - 1)$ كالآتي:

$$f(x) = \ln x \qquad f(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f'(1) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad f''(1) = -1$$

$$f'''(x) = +\frac{2!}{x^3} \qquad f'''(1) = 2!$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{3!}{x^4} \qquad f^{(4)}(1) = -3!$$

$$\dots \quad \dots \qquad \dots \quad \dots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n} \qquad f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

ويكون مفكوك تايلور للدالة $f(x) = \ln x$ حول $x = 1$ هو:

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \dots + 0(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x-1)^n + \dots$$

مثال (٢): أوجد مفكوك تايلور للدالة $f(x) = \sin x$ في قوى $\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

الحــل:

$$f(x) = \sin x \qquad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \cos x \qquad f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f''(x) = -\sin x \qquad f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

وبالتعويض في مفكوك تايلور ينتج:

$$\sin x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2(2!)}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2(3!)}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + \ldots$$

والحد العام في هذه المتسلسلة يعطى من:

$$u_n = \begin{cases} (-1)^{n/2} \dfrac{1}{2(n!)}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)^n & , \quad n = 0,2,4,6,\ldots \\ (-1)^{(n-1)/2} \dfrac{\sqrt{3}}{2(n!)}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)^n & , \quad n = 1,3,5,7,\ldots \end{cases}$$

صيغة أويلر:

ومن التطبيقات الهامة لمفكوك ماكلورين أنه يمكن استنتاج صـيغة رياضـية بسيطة وهي ما تسمى بصيغة أويلر والتي بواسطتها يمكن استنباط علاقات وثيقة وهامة بين الدوال المثلثية sin x , cos x والدوال الزائديـة sinh x , cosh x والتي يمكن الاستفادة منها في كثير من التطبيقات الرياضية.

إيجاد صيغة أويلر:

باستخدام مفكوك e^{ix} في قوى x حيث x عدد حقيقي بينما $i=\sqrt{-1}$ نحصل على:

$$e^{ix}=1+ix+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\frac{(ix)^4}{4!}+\frac{(ix)^5}{5!}+\dots$$

$$=\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots\right]+i\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots\right]$$

$$=\cos x+i\sin x$$

وتسمى الصيغة:

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \qquad (1)$$

بصيغة أويلر.

وأيضًا بوضع $(-x)$ بدلاً من x في العلاقة السابقة ينتج:

$$e^{-ix}=\cos x-i\sin x \qquad (2)$$

ومن العلاقات (1) , (2) وبجمعهما ثم طرحهما نحصل على العلاقات الآتية:

$$\cos x=\frac{1}{2}\left[e^{ix}+e^{-ix}\right]=\cosh ix$$

$$\sin x=\frac{1}{2i}\left[e^{ix}-e^{-ix}\right]=\frac{1}{i}\sinh ix$$

أي أن:

$$\sinh ix=i\sin x \qquad \cosh ix=\cos x$$

كذلك:

$$i\sinh x=\sin ix \qquad \cosh x=\cos ix$$

تمارين

١- أوجد مفكوك ماكلورين للدوال الآتية:

(i) $\tan x$

(ii) $e^{x \sin x}$

٢- أثبت صحة المفكوكات الآتية:

(i) $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^4 + ...$

(ii) $\ln(1+\sin x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - ...$

(iii) $\ln(1+\cos x) = \ln 2 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + ...$

(iv) $\ln(1+e^x) = \ln 2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{192}x^4 + ...$

٣- أوجد مفكوك $\cos x$ في قوى $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

٤- أوجد مفكوك $\tan x$ بقسمة مفكوك $\sin x$ على مفكوك $\cos x$ ثم حقق الناتج باستخدام مفكوك ماكلورين.

٥- أثبت أن:

$$\tanh^{-1} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + ...$$

٦- أوجد قيم النهايات الآتية:

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sinh x}$

(ii) $\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x-\sin x}{x^{3}}$

(iii) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\left(e^{x}-1\right)^{3}}$

(iv) $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$

(v) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1+x}{x-\ln(1+x)}$